

## 1 研究主題

# 数学的な表現力を伸ばす学習指導方法の改善に関する研究 根拠を追究する活動を通して

### 内容の要約

本研究は、数学的な表現力を伸ばすための学習指導方法を明らかにしようとしたものである。「書いたものだけで自分の考えを相手に伝えよう」という課題を設定し、自分なりの解決方法をお互いに指摘し合うグループ活動を取り入れた。その結果、他者の指摘を受け入れたり、自分なりの表現と他者の表現とを比較しながら、説得力のある表現に気付き、客観性に富んだ表現や筋道を立てた明確な表現に修正できる生徒が見られるようになった。

### キーワード

(1)中学校数学 (2)数学的な表現力 (3)反省的思考 (4)表現様式

## 2 主題設定の理由

本教育センターが平成10年度から2か年にわたって行った中学校数学の学習到達度調査及び教師の意識調査では、結果のみを問う問題の正答率は高かったものの、理由の説明を求める問題では、無答がかなり多くあった。教師への意識調査の結果でも、根拠や考え方を記述させる問題の必要性は感じていても、実際の定期テストなどでの出題は少なかった。

また、教育課程審議会の答申では、中学校数学科の改善の基本方針として、「数量や図形についての基礎的・基本的な知識・技能を習得し、それを基にして多面的にものを見る力や論理的に考える力など創造性の基礎を培う」<sup>(1)</sup>ことが重要であると述べられている。しかし、生徒は答を出すまでの論理的な思考過程よりも、答そのものの正誤を知りたがる傾向にある。それだけに、これからは「根拠を明らかにし、筋道を立てて説明する表現力や論理的な思考力の育成」<sup>(2)</sup>がますます大切なものになっていくと考える。

数学的な表現力の育成を重視した授業を展開するには、根拠や考え方を記述させる問題を提示し、自分なりの表現から筋道を立てた説得力のある表現へと高めるための学習を仕組まなければならない。また、表出された考えが相手に正確に伝わったかを確かめる必要もある。そこで、自分の考え方や解決方法を問い直し、練り上げる学習の場を設定し、根拠を追究する活動を取り入れれば、数学的な表現力の育成につながると考え、本主題を設定した。

## 3 研究の目標

課題を自ら解決していく過程を通して、数学的な表現力を伸ばすための具体的な方策を探る。

## 4 研究の仮説

数学科の学習指導過程において、次のような手立てをとれば、数学的な表現力を伸ばすことができるであろう。

多様な見方や考え方が可能な学習課題の設定

自分の考え方や解決方法を問い直し、練り上げる学習の場の設定

自分の表現の変化が確認できる「ひらめきプリント」の利用

## 5 研究の内容と方法

### (1) 研究の内容

- ア 「数学的な表現力」「根拠を追究する方法」についての研究
- イ 根拠や考え方を記述させる問題に関する研究
- ウ 根拠を追究する活動を通して数学的な表現力を高める授業実践

### (2) 研究の方法

- ア 「数学的な表現力」「根拠を追究する方法」について、文献や資料を基に理論研究を行う。
- イ 自分なりの表現から筋道を立てた表現へと修正できるような記述式の問題を開発する。
- ウ 検証授業を行い、生徒の数学的な表現力の伸びを検証し、考察する。
- エ 研究の成果と課題をまとめる。

## 6 研究の実際

### (1) 「数学的な表現力」について

#### ア 「数学的な表現力」のとらえ方

本研究では、数学的な表現力のとらえ方を次のように定義した。

数学的な表現力とは、事象を数理的に処理する際に思考したことを具体物、図、表、グラフ、言葉、記号、数式などを用いて、他者とのコミュニケーションを図る能力や態度のことである。ここで、態度とは積極的に表現しようとする態度を言う。

数学的な表現力のとらえ方については、広島大学の中原忠男の理論を参考にした。中原は、図1のように5つの表現様式を大きく2つに分け、次のように述べている。「類似的表現とは、指示対象の何らかの意味内容を視覚的な様式において含んでいることから用いられ始めることが多い。したがって、それらは直観性、具体性、イメージ性などに富み、親しみやすい性格をもつことになる。反面、その表現は規定によることが少ないので厳密性、客観性などの性格は薄い。他方、規約的表現は細部まで明確に規定して用いることが多いので、厳密性、客観性等に富む。」<sup>(3)</sup>

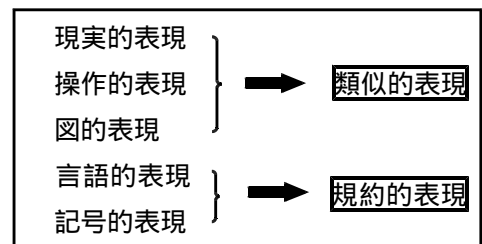


図1 表現様式の種類

他者とのコミュニケーションを図る上では、表現が客観性をもたないと伝わりにくい。客観性ということから考えると、類似的表現より規約的表現の方が望ましい(ただし、立体の展開図などの場合は図的表現が規約的表現となる)。また、同じ表現様式であっても、筋道を立ててより明確に表現されている方がコミュニケーションは図りやすい。以上のことから、表現する能力については【観点】を、表現しようとする態度については【観点】を基に検証する(図2)。

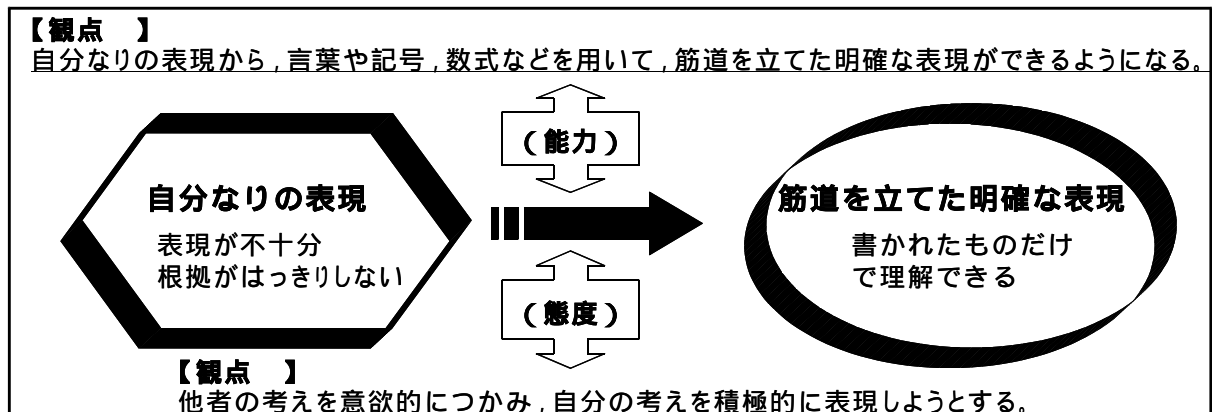


図2 表現する能力と態度

## イ 「数学的な表現力」を伸ばす意義

学習指導要領解説数学編では目標の改善として、「数学の学習では、単に問題を解いて答えを求めるといったことだけではない。これまで述べてきたように、自ら調べ判断する力や、粘り強く考え続け考えたことを相手に分かるように説明したり表現したりする論理的な思考力や表現力も大切にすることがある。」<sup>(4)</sup>と述べられている。

こうした「数学的な表現力」を伸ばすことによって、次のようなことが期待できる。

数学のもつ表現方法のよさに気付き、積極的に問題に取り組もうとする。  
正しく伝えるための論理的な思考力が高まる。  
数理的に考察することのよさを味わうことができる。

については、他者の考えを積極的につかもうとする際に、様々な表現方法の中で「説得力のある表現」に気付いていく。なぜ「説得力」があるのか、これは数学のもつ表現方法のよさが発揮できていることにある。については、自己の考えを伝えたり、他者の考えをつかもうとしたりするときに「正しく伝えるための論理的な思考力」を必要とする。つまり、課題解決の根拠となるものを明確に示し、論理的に伝えることが要求されることになる。については、を経験することによって、文字式のよさなどを実感することで味わうことができると考える。

## ウ 「数学的な表現力」を伸ばす指導のポイント

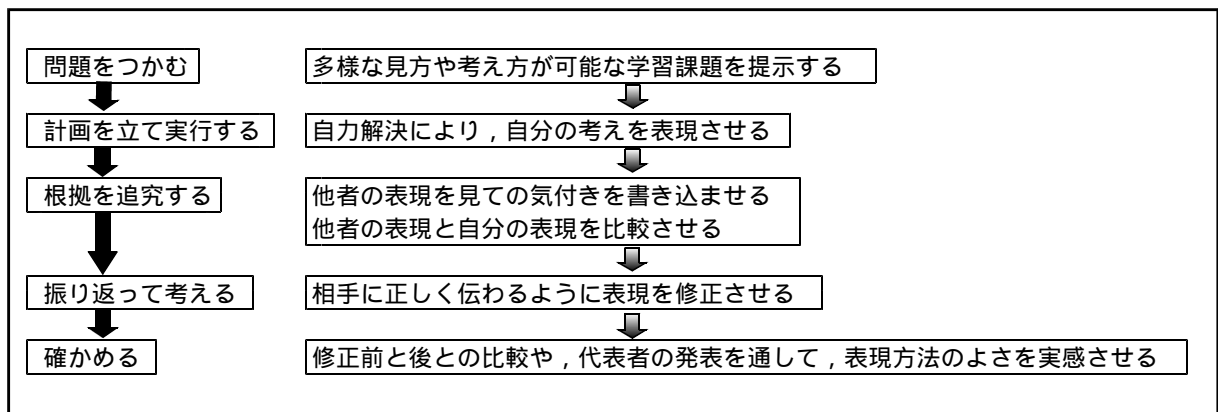
数学的な表現力を伸ばすには、自分の考えを形（数学的な表現）に表し、他者へ伝え、自分の意図が正しく伝わるように自己の表現を振り返り（反省的思考）、修正していくことがポイントとなる。

そのために、次のことを取り入れる。

多様な見方や考え方を生み出す課題の設定  
根拠を追究する活動を基に、反省的思考を促す学習の場の設定  
表現の変化が確認できる「ひらめきプリント」の利用

数学的な表現力の育成は、まず生徒が自分の考えを書くことから始まる。そのためには、多様な見方や考え方のできる課題の設定が不可欠である。このような課題によって自分なりの表現が可能となる。そして、自分なりの表現をお互いに見せ合い指摘するというグループ活動を通して、他者の指摘を受け入れたり、他者の表現のすばらしさを感じたりすることができる。自分だけでは表現力の伸びは限られるため、このグループ活動をきっかけとして、どのような表現がより正確に相手に伝わるかということを踏まえた表現の修正が可能になる。ここでは、他者の指摘を受け入れ自分の表現を振り返るといった反省的思考を引き出すことがポイントとなる。さらに、修正前と修正後を比べて見ることで、自分の表現の変化を確認し、数学のもつ表現方法のよさに気付くこともできる。本研究では、以上のことを踏まえて授業を検証していくことにした（表1）。

表1 検証授業の授業過程



(2) 「数学的な表現力」の伸びのとりえ方について

授業で用いた生徒用の学習プリント「ひらめきプリント」については、表現の修正前と修正後を比較させるために、1枚のプリントに並べて書けるようにした(図3)。まず、自力解決による自分なりの表現を書き込ませた後、根拠を追究するグループ活動を行った。お互いの表現を非難しないよう注意した上で、プリントを交換させ、お互いに指摘を直接書き込ませた。その際、だれがどのような指摘をしたかよく分かるように指摘内容を赤で書き込ませ、指摘

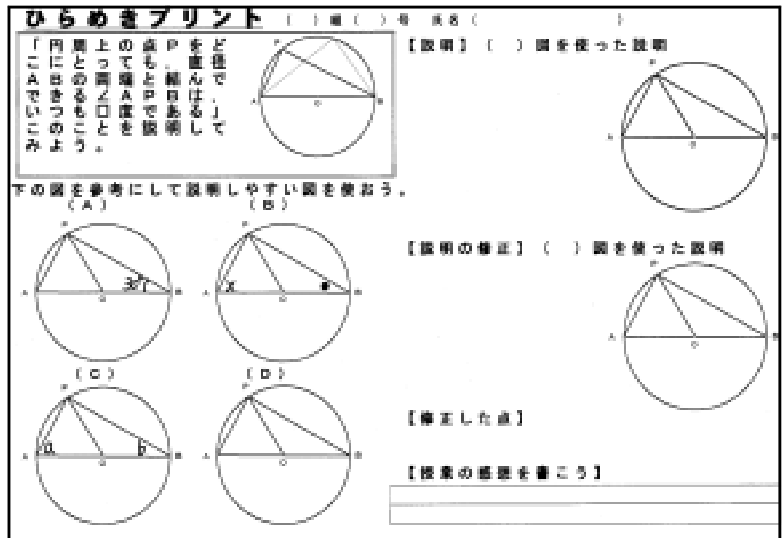


図3 ひらめきプリント

した生徒の名前も記入させた。表現する能力の検証は、前述した【観点】を基に、同じ問題についての修正前と修正後を比較して行った(図4)。なお、修正を加える前から既に完成された解答であった場合は、表現力が伸びたという生徒から外して考えることとした。また、表現しようとする態度については、【観点】を基に生徒の自己評価における感想を分析した。

修正前	指摘	
<p><math>APB = 90^\circ</math> になるのはなぜ?  <math>OPB</math> は、二等辺三角形だから  <math>OBP</math> が <math>30^\circ</math> だと <math>OPB</math> も <math>30^\circ</math> になり、 <math>POB</math> は、 <math>120^\circ</math> とわかる。  <math>AOP</math> は、二等辺三角形だから、 <math>180^\circ - 60^\circ = 120^\circ</math> で <math>120^\circ</math> を 2 で割ると両角とも <math>60^\circ</math> になる。 <math>OPB (30^\circ)</math> と <math>OPA (60^\circ)</math> をたすと <math>APB = 90^\circ</math> となる。</p>	<p>どうして二等辺三角形になるのかを書いたらどうですか。 太郎          ・式で書いたら見やすい。 次郎</p>	
<p>修正後</p> <p><math>APB = 90^\circ</math> になるのはなぜ?          辺 <math>OA, OP, OB</math> は円 <math>O</math> の半径なので、すべて等しい。          よって <math>OPB</math> と <math>APO</math> は二等辺三角形である。  <math>OPB</math> を <math>x</math> とおく。 <math>APO</math> を <math>x</math> とおく。  <math>OPB</math> は二等辺三角形なので、 <math>OBP</math> も <math>x</math> とおける。  <math>APO</math> は二等辺三角形なので、 <math>PAO</math> も <math>x</math> とおける。          三角形の内角の和は <math>180^\circ</math> なので、 <math>x + x + x = 180^\circ</math>。  <math>APB = x + x</math> なので、 <math>180^\circ</math> の半分だから <math>APB = 90^\circ</math>。</p>		

図4 表現する能力の伸びが認められた例

(3) 検証授業

ア 検証授業 (平成13年10月実施, 33名)

- (ア) 第1学年「課題学習 - おはじきの数を求めよう - 」
- (イ) 指導目標 問題の解決に意欲的に取り組み、自分なりの解決方法を表現し、他者からの指摘を参考にしながら、表現を更に筋道立てた明確なものにできるようにする。
- (ウ) 指導計画 第1時 タイルの枚数を求めよう・・・1時間  
 第2時 おはじきの数を求めよう・・・1時間(本時)

(I) 学習課題

【問題】『おはじきの数を求めよう』  
 おはじきを、下の図のように1番目、2番目、3番目、……と並べていきます。  
 1番目          2番目          3番目          4番目

.....

(1) 4番目に並べるおはじきは、全部で何個になりますか。  
 (2) 16番目に並べるおはじきの数を求める考え方と答を書きなさい。  
 (3) n番目に並べるおはじきの数を求める考え方と答(式)を書きなさい。  
 (4) 100番目に並べるおはじきは、全部で何個になりますか。

(オ) 【観点】についての考察

生徒の考え方は、次のように分類することができた(表2)。

表2 検証授業における生徒の考え方の分類表

図的表現の例	言語的表現の例	記号的表現の例	人数	一般化までできた人数												
..... 3個 ..... 4個 ..... 5個 ..... 6個	上から1個ずつ増えている	$n+n+1+n+2+n+3$	11	( ) 10 ( 30%)												
	1番目の10個を基準に4個ずつ増える	$10+4(n-1)$ や $10+4n-4$	13	( ) 9 ( 27%)												
	平行四辺形と6個のおはじきに分ける	$4n+6$	3	( ) 2 ( 6%)												
	台形の面積として考える	$\frac{4(n+n+3)}{2}$	1	( ) 1 ( 3%)												
	6個加えて平行四辺形を作る	$4(n+3)-6$	1	( ) 1 ( 3%)												
<table border="1" style="font-size: small;"> <tr><td>番目</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td></tr> <tr><td>個数</td><td>10</td><td>14</td><td>18</td><td>22</td><td>26</td></tr> </table>	番目	1	2	3	4	5	個数	10	14	18	22	26	次の番目を基準として考える	$4(n+1)+2$	1	( ) 1 ( 3%)
番目	1	2	3	4	5											
個数	10	14	18	22	26											
	6番目が30個であることを基準にして考える	$4(n-6)+30$	1	( ) 0 ( 0%)												
16番目まで求めているが答のみ			2	( ) 0 ( 0%)												

一般化ができた生徒の割合は、( ) + ( ) + ( ) + ( ) + ( ) + ( ) より72%(24名)であった。(対象33名)

生徒の多様な考え方を引き出せる課題である。生徒なりに解決方法は表現できたが、相手に正しく伝えることは難しかったようである。一般化ができた生徒が72%で、一般化可能な考え方まで含めると88%と非常に高く、数学的な見方や考え方が伸びたと判断できる。実際に図に書いて考えたことや他者の考えと自分の考えを比較して修正したことなどが有効であったと考えられる。



写真1 根拠を追究する場面

数学的な表現力の伸びについては、3つに分けて検証を行い、42%の生徒に表現力の伸びが見られた。(表3)。やや低い数値ではあるが、修正前から既に完成された表現であった生徒が49%いたということから考えると、表現力の伸びは十分達成されたと判断できる。

表3 検証授業における表現する能力の伸び

検証の項目	人数(割合)
自分なりの表現が、言葉や記号、数式などを用いて、筋道を立てた明確な表現となった。【観点】	14 ( 42%)
修正前から既に完成された表現であった。	16 ( 49%)
答のみのままで表現の変化が見られない。	3 ( 9%)

(カ) 【観点】についての考察

図5に示す生徒の解答は、自己評価から判断して、他者の考えを積極的に取り入れようとするなどの意欲面の向上が表現力の伸びにつながったと判断できる例である。自力解決において、「おはじきは」という表現だけで終わっていた生徒が、他者の解決方法を参考にして、言葉と数式による表現ができた例である。自己評価からもうかがえるように、他者の図による表現を参考にしながら、それを自分なりに解釈し、自分自身の知識として構成できたことは評価できる。

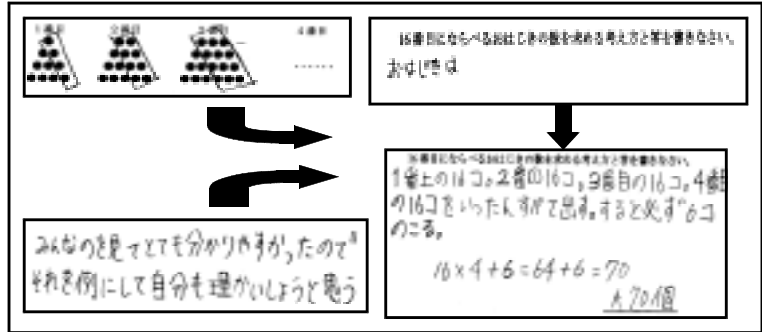


図5 表現の変容と自己評価

イ 検証授業 (平成13年12月実施, 33名)

(ア) 第2学年「課題学習 - 正方形をつなげよう - 」

(イ) 指導目標 自分の解決方法を意欲的に表現し、他者の指摘を積極的に受け入れることで、自分なりの表現から、筋道を立てた明確な表現ができるようにする。

(ウ) 指導計画 第1時 リングをつなげよう・・・1時間  
第2時 正方形をつなげよう・・・1時間(本時)

(I) 本時の展開

段階	学習のねらいと発問	形態	学習活動	留意事項
導入	1 本時の課題を理解する。 自分の考えを書いたものだけで相手に伝えよう。	一斉	・表現力を伸ばすことが本時の課題であることを把握する。	・自分の考えを書いたものだけで相手に伝えるよう努力することが本時の課題であることを強調する。
展開	2 問題を解決する。 【問題】『正方形をつなげよう』 棒で正方形を作り、下の図のように右へつなげます。正方形がn個のときの棒の本数を、nを使って表しなさい。 正方形が1個 □ 正方形が2個 □□ 正方形が3個 □□□ 正方形がn個 □□□□	個	・問題をつかむ。	
	3 表現を指摘し合う。 よく理解できなかったところや、分かりやすかったところをひらめきプリントにお互い記録しよう。	グループ	・ひらめきプリントに自分なりの解決方法を表現する。	・自由に書かせる。 ・綿棒を持たせているので、生徒によっては、実際に正方形を作らせる。 ・式の中の数が何を表しているかをしっかりとらえさせておく。 ・いろいろな考え方があることに気付かせる。 ・具体的な指摘を書くよう促す。
	4 表現を修正する。 指摘を受けて、表現を修正しよう。	個	・解決方法について、お互いに指摘し合う。	・指摘を受け入れ、自分の解決方法を振り返って考えるよう支援する。
	5 発表する。 何人かの代表者に発表をしてもらいます。	一斉	・指摘を受けてよりよい表現に修正する。	・いろいろな考え方があることに気付かせる。 ・筋道を立てた明確なものを発表させることで、分かりやすい表現を実感させたい。
整理	6 自己評価を行う。	個	・他者の解決方法を理解する。	
		個	・授業の感想を記入する。	

(イ) 【観点】についての考察

生徒は、表4に示すように、いずれかの考えをもって、自分なりに筋道を立てて表現することができた。そのうち一般化ができた生徒が60%で、一般化可能な考え方で含めると85%と非常に高く、数学的な見方や考え方の伸びがうかがえる。「実際に棒を並べることでよく分かった」などの生徒感想が多かったことから考えると、操作的活動が有効であったと言える。



写真2 操作的活動の場面

表4 検証授業における生徒の考え方の分類表

図的表現の例	言語的表現の例	記号的表現の例	人数	一般化ができた人数
	2個目から3本ずつ増える	$4 + 3(n - 1)$	15	( ) 8 ( 24% )
	1個目から3本ずつ増える	$1 + 3n$	10	( ) 7 ( 21% )
	それぞれが4本で成る正方形とする	$4n - (n - 1)$	4	( ) 3 ( 9% )
	縦と横の棒に分ける	$2n + n + 1$	3	( ) 2 ( 6% )
図に書いた棒を数える			1	( ) 0 ( 0% )

一般化ができた生徒の割合は、( ) + ( ) + ( ) + ( ) より60%(20名)であった。(対象33名)

数学的な表現力の伸びについて、3つに分けて検証を行い、73%の生徒に数学的な表現力の伸びが見られた(表5)。自分の考えをもって取り組めたことや一般化の考え方を獲得したことが原因であると考える。なお、表現力が伸びた24名と一般化ができた20名との差は、n番目のときの棒の本数を表すという記号的表現まではできなかったが、そこまでの問題で表現力に伸びが見られたということである。

表5 検証授業における表現する能力の伸び

検証の項目	人数(割合)
自分なりの表現が、言葉や記号、数式などを用いて、筋道を立てた明確な表現となった。【観点】	24 ( 73% )
修正前から既に完成された表現であった。	6 ( 18% )
答のみのままで表現の変化が見られない。	3 ( 9% )

図6の生徒の解答は、表現の変容とどのような指摘が有効であったかを示したものである。左側の例は、「4って何?」という指摘を受け入れ、「 $4 \times 5 - 4$ 」という式の $-4$ がどのような意味を表すかを言葉と図によって説明している。指摘を受け入れ、数式の意味を確認したことで、一般化の考えも獲得できた生徒である。右側の例は、「そうなった理由を書くといい」という指摘を受け入れ、答のみの表現を、数式と言葉によって根拠を明らかにした表現に修正し、一般化の考えも獲得できている。いずれも、根拠を追究する活動を通して、他者に正確に伝わるよう表現を修正している点が評価できる。

図6 表現の変容と指摘の例

(カ) 【観点】についての考察

生徒の自己評価を見ると、「今までの授業とは違うけれどもまたやりたい」「自分の考えを相手に伝え

ることがおもしろかった」などという感想が多く含まれており、意欲面の向上がうかがえる。第1時の『リングをつなげよう』という授業からの変容の例を次に示す(図7)。

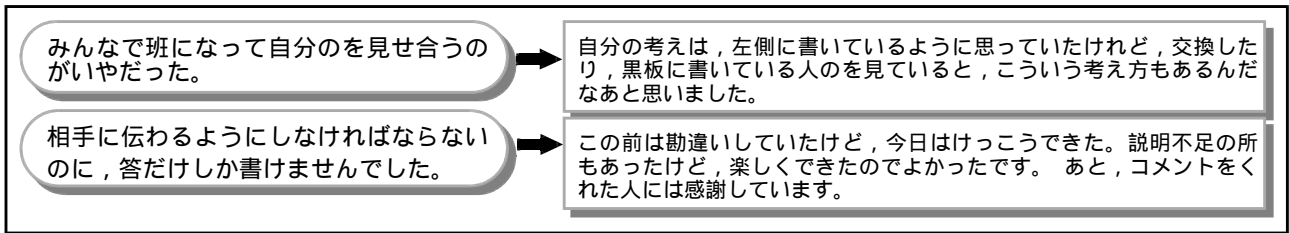


図7 意欲面の変容の例

また、この検証授業を行った中学校では、国語科の授業において、お互いに指摘し合うというコミュニケーション活動が取り入れられていたため、指摘を受け入れようとする積極的な態度も見られた。

ウ 検証授業 (平成12年11月実施, 39名)

- (ア) 第2学年「課題学習 - 消費税の不思議 - 」
- (イ) 指導目標
  - ・他者の考えをつかみ、さらに、自分の考えを意欲的に表現することができる。
  - ・他者の指摘を受け入れ、筋道を立てた明確な表現に修正できる。
- (ウ) 指導計画
  - 第1時 100円でチョコレートがたくさん買おう・・・1時間
  - 第2時 ばら買いとまとめ買いの差・・・1時間(本時)

(I) 学習課題

**【問題】**  
 1個10円のチョコレートを買うのにばら買いがまとめ買いよりも10円少なくてすむのは、何個買うときでしょうか。ただし、消費税は5%とし、1円未満は切り捨てるとします。  
 みんなに分かるように説明しましょう。

(オ) 考察

図8は、図を使った表現から言葉を使った表現へと伸びが見られた例である。修正前は、個数が増えると消費税がどのように増えていくかを図を使って表現している。この図は、解答を求めるための思考を自分自身が分かるように整理していったものである。この図をかくことで、消費税が1円増えるのはどのような場合であるかということが自分の中で確信できている。しかし、他者へ伝えるためには十分とは言えない。修正後は自分の考えが他者へ伝わるように言葉を使って表現したものである。十分と言えるものではないが、表現されたものだけを比べてみると、その伸びが評価される。次の図9は言葉や数式を使った表現で伸びがあったものである。「10円増えただけでは税はかからない」など、根拠を明らかにしながら他者に正しく伝わるように表現している点が評価される。

全体としては、90%の生徒に表現力の伸びが見られた。どの表現からどの表現へ変わることが表現力の伸びと言えるのか。それは課題によって異

**【修正前】**

1	2	3	4	.....	20	21
10	20	30	40		200	210
0.5						
1円						
1円						
2円						
.....						
10円						
10円						

~~~~~

**【修正後】**

20個のときでも10円差だが、21個のときの(10+0.5)円の0.5円は0円とみなされるから21個のときも差は10円である。

図8 表現の方法を変えた例(生徒解答)

**【修正前】**

ばら買いは、何個買っても税はない。  
 税が10円になる場合は、20円で1円なので、  
 $20 \times 10 = 200$   
 200円買ったとき、つまり20個買ったときである。

~~~~~

**【修正後】**

ばら買いは何個買っても税はかからない。  
 まとめ買いは、20円に1円税がかかり、  
10円増えただけでは税はかからない。  
 税が10円になるということは2通りある。  
 $20 \times 10 = 200$   
 200円買ったとき、つまり20個買ったとき。  
 ある偶数の個数に1つ増やしても税は増えないので、  
 $20 + 1 = 21$   
 答 20個, 21個

図9 根拠を加えた表現の例(生徒解答)



なる。しかし、この課題では、図や表のままでは客観性に乏しいため、自分の意図する解決方法が他者に伝わりにくい。そのため、言葉や式で表現したときの方が客観性に富み、伝わりやすいと実感したようである。同じ言葉による表現であっても、根拠となる事柄を付け加えることで正しく伝えようとした解答もあり、コミュニケーションを図る能力の向上が見られた。

**Ⅱ 検証授業**（平成13年11月実施，36名）

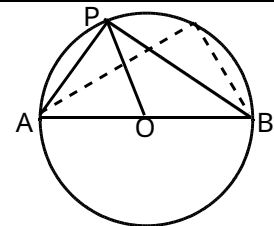
(ア) 単元 第3学年「円の性質」

(イ) 指導目標 半円の弧に対する円周角が90度であることを証明できる。

- (ウ) 指導計画 1 円 § 1 . 円と直線 . . . . . 4 時間  
 § 2 . 2つの円 . . . . . 3 時間  
 2 円周角 § 1 . 中心角と円周角 . . . . . 6 時間（本時 1 / 6）  
 § 2 . 円に内接する四角形 . . . . . 3 時間  
 § 3 . 接線と弦のつくる角 . . . . . 2 時間  
 問題 . . . . . 2 時間

(I) 本時の展開

段階	学習のねらいと発問	形態	学習活動	留意事項
導入	1 本時の課題を理解する。	一斉	<ul style="list-style-type: none"> <li>・タレスの定理を見付け、それを表現する力を伸ばすことが課題であることを把握する。</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>・円周角の定理を学習する導入の段階である。帰納的手法で学習する。</li> <li>・図を見てイメージすることを大切にす。</li> </ul>
展開	2 問題を解決する。 2 新しい円の性質を見付け、書いたものだけで伝わるように表現しよう。	↓		
<p>【問題】「半円の弧に対する円周角」を考えよう。</p> <p>『円周上の点Pをどこにとっても、直径ABの両端と結んでできる角、<math>\angle APB</math>はいつも（ ）度である。』このことを説明しよう。</p>				
整理	3 表現を指摘し合う。 よく理解できないところや、分かりやすかったところをひらめきプリントにお互い記録しよう。	一斉	<ul style="list-style-type: none"> <li>・半円の弧に対する円周角が何度くらいになるか考える。</li> <li>・「タレス」について、話を聞く。</li> <li>・ひらめきプリントをヒントに自分なりの解決方法を表現する。</li> <li>・お互いの解決方法について、指摘し合う。</li> <li>・指摘を受けてよりよい表現に修正する。</li> <li>・他者の解決方法を理解する。</li> <li>・授業の感想を記入する。</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>・ここでは円周角が90度くらいになる程度にとどめる。</li> <li>・「円周角」の用語は次時に指導する。</li> <li>・自分なりの解決方法を考えさせることで、生徒の主体的な活動を促す。</li> <li>・お互いの指摘が的確になるように支援する。</li> <li>・指摘を受け入れ、表現を修正するよう促す。</li> <li>・より簡潔で明確な表現を提示することで分かりやすい表現を実感させたい。</li> </ul>
	4 表現を修正する。 指摘を受けて、表現を修正しよう。	↓ 個		
	5 発表する。 何人かの代表者に発表をしてもらいます。	↓ グループ		
	6 自己評価を行う。	↓ 個		
		↓ 一斉		
		↓ 個		



(オ) 【観点】についての考察

この検証授業に限って、「円の性質」という単元を通して行った。検証授業における表現力の伸びは、79%であった。9時間を通して行っているため、生徒からの指摘がかなり具体的で、そのことが表現力の伸びにもつながったと判断できる。また、授業の最後に修正した点としてまとめさせることで、問題を解いたときのポイントは何であったか、自分なりの表現で足りなかった根拠は何であったかなどに気付かせようと試みた。その結果、「二等辺三角形になる理由を書き加えた」、「複雑な書き方をしていたので簡単にした」、「常に成り立つことを説明するために文字を使った」、「三角形を に、角を に直した」など、生徒なりのポイントが引き出せた。その例を図10に示す。

**【証明】(A) 図を使った証明**

△OPB は二等辺三角形  
 ⇒ 等辺三角形の底角は等しい  
 $\angle POB = \angle OPB = 30^\circ$   
 $\angle BOP = 60^\circ - 60^\circ = 120^\circ$   
 $AB = 120^\circ$  の弧  
 $\angle AOP = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$   
 △OPA は二等辺三角形  
 ⇒ 等辺三角形の底角は等しい  
 $\angle OPA = \angle OAP = (180^\circ - 60^\circ) / 2 = 60^\circ$   
 $\angle APB = \angle OPA + \angle OPB = 60^\circ + 30^\circ = 90^\circ$

**【修正した点】**

書きでは「いつか」とは言えないので文字を使い、修正した。  
 三角形の一つの外角は他の二つの角をたしたものと  
 のを使って  $\angle POA$  と  $\angle POB$  を表した。

**【証明の修正】(C) 図を使った証明**

点 P は円周上を動くので、いつでも  
 $OA = OB = OP$  である。△OPB と  
 △OPA はいつでも二等辺三角形。  
 ⇒ 二等辺三角形の底角は等しい  
 はずだから、 $\angle POB = \angle OPB = \alpha$   
 $\angle PAO = \angle OPA = \beta$   
 三角形の一つの外角は他の二つ  
 にたした角をたしたものとだから、  
 $\angle POA = 2\alpha$ 、 $\angle POB = 2\beta$   
 $AB = 180^\circ$  である。  $\angle APB = 2\alpha + 2\beta$   
 $2\alpha + 2\beta = 180^\circ$   
 $\alpha + \beta = 90^\circ$

図10 表現の変容と修正したポイント

(カ) 表現様式について

生徒の表現様式を分類すると次のようになる。

類似的表現	
<p><b>現実的表現</b></p> <p>具体的な角度 (<math>B = 30^\circ</math>, <math>A = 60^\circ</math> など) を設定して、二等辺三角形の条件や三角形の内角の和などを利用して、<math>\angle APB</math> を求めていく場合。</p>	
<p><b>操作的表現</b></p> <p>点 P を円周上で動かしていき、点 A と重なった場合を考える。接線と半径の関係から <math>\angle APB</math> を求めていく場合。</p>	
<p><b>図的表現</b></p> <p>A を x、B を y として、右図のように図に示しただけの場合。                  PO を延長し円周と交わる点を Q とし、四角形 PAQB が長方形になることを図に示しただけの場合。</p>	
規約的表現	
<p><b>言語的表現</b></p> <p>前記の 図 を表現する際に、言葉を使って説明していく場合。</p>	
<p><b>記号的表現</b></p> <p>A を a、B を b とおいて、二等辺三角形の条件や三角形の内角の和などを利用してながら式を使って説明していく場合。</p>	

図11は、表現様式の変容を示したものである。言語的表現については、他の表現様式と明確に区別することが困難であったため、言語的表現を除いた4つに分類し、修正の前後を比較した。現実的表現が94%から33%に減少し、記号的表現が0%から53%に増加している。また、図的表現が8%増加したのは、現実的表現から角をと×で表現しようとした変容である。いずれも図に示しただけで表現としては十分ではなかったが、と×を使うことによって、より抽象的な表現へ変換しようとする態度は評価できる。円の性質の単元を通して、表現力の指導を継続させたことが、記号的表現の必要性に迫ることにつながったと言える。

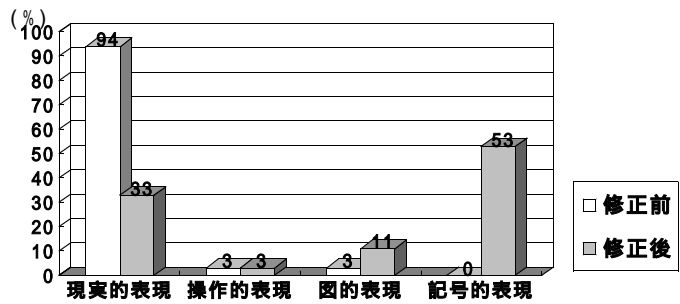


図11 表現様式の変容

(†) 単元「円の性質」を通しての考察

最初の「自分なりの表現」では現実的表現で表した生徒が多くいた。また根拠を明らかにせずに説明している生徒もいたが、ほとんどの生徒は「二等辺三角形だから」などの根拠を書いていた。「円の性質」の単元では、本時まで8時間の「表現力を伸ばす」活動を行ってきた。初めころは自分の考えをうまく表現できずに何も書けない生徒や、書いても根拠が明らかにされていない生徒が多かったが、この問題では、何も書けない生徒はほとんどいなかった。何よりも根拠を書こうとする生徒が非常に増えたということは評価できる。

(ク) 【観点】についての考察

自分が考えつかなかった表現に出会ったときに、生徒は次のような感想をもっている。

- |   |
|---|
| <p>a 自分で考えるのはとても難しかった。友達からアドバイスをもらおうとまとめやすくよかった。</p> <p>b 自分の考えと違う考えの人を見られるのでいいと思います。</p> <p>c やっぱり班でした方が分かりやすかった。修正することで、より分かってよかった。</p> <p>d 人に説明を伝えるのは難しい。</p> |
|---|

自分と他者の考えの違いを見ることや他者からのアドバイスは、教師が行う支援よりも生徒にとっては印象的で分かりやすい場合があると言える。

7 研究のまとめと今後の課題

(1) 研究のまとめ

ア 表現する能力

他者に分かるように伝えることの難しさを実感することにより、他者を意識した表現に修正する生徒が多く見られた。他者からの指摘を受け入れ、解決に至るまでの根拠を加えながら表現を修正することで、客観性に富んだ表現や筋道を立てた明確な表現が生まれたと言える。また、操作的活動や反省的思考を通して、抽象化や一般化の考え方を獲得し、より高度な規約的表現へと発展したと考える。反省的思考を促すことに有効であった場面が根拠を追究するグループ活動である。他者への指摘は、やや抽象的で「分かりにくい」「なぜ、そうなったの」などがほとんどであったが、自分なりの表現を修正するきっかけとしては十分であった。また、このグループ活動を継続させることで生徒からの指摘がより具体的になり、自らの考えを他者に伝えるためには客観性に富んだ記号的表現が必要であるということを生徒自らが気付くようになっていった。

イ 表現しようとする態度

表現力の伸びを態度面から見ると、答だけではなく、そこに到達する途中の考えを表現することの大切さを感じ取っていたり、「人に分かりやすく」の指示で表現に工夫が見られたりした。自己評価

の中にも、他者に伝えることの難しさを実感したことで、表現しようとする意欲が高まったり、他者の考えを知ることによって理解が深まって修正がうまくいったなどという感想が多く見られ、自分の考えを表現しようとする意欲の向上がうかがえた。

## (2) 今後の課題

### ア 継続した指導

数学的な表現力の育成は、生徒が自分の考えを書くことから始まる。間違いを恐れていたり恥ずかしがっている場合は表現力の伸びは見られない。また、級友を非難するような雰囲気があればグループ活動も困難なものになってしまう。間違っても大丈夫だという学習の雰囲気と「書きながら考える、考えながら書く」という指導を継続することが重要であろう。

### イ 数学的な見方や考え方との関連性

表現力と数学的な考え方や知識との関連を検証する必要がある。分かっているけれども書けないでいるのか、分からないから書けないでいるのかということの実態を把握し、数学的な知識や考え方を含めた数学的な表現力の検証を行う必要がある。

### ウ 追究の在り方

根拠を追究する活動をより効果的に行うために、指摘の仕方がある程度提示したが、生徒からの指摘は、「なぜ」「分かりにくい」などという単純なものがほとんどであった。根拠を追究する活動をより効果的に行うためには、どのような観点でお互いのプリントを見るのか、どのような指摘をするのかなど、生徒にとって分かりやすい活動に高めていくことが重要である。

## 《研究委員》

山浦 修	佐賀県教育センター研修員	平成13年度
木原 敏也	塩田町立塩田中学校	平成12～13年度（平成12年度佐賀県教育センター研修員）
平田 裕治	唐津市立第五中学校教諭	平成13年度
真崎 博之	佐賀市立城南中学校教諭	平成12年度
太田 義博	太良町立大浦中学校教諭	平成12年度

## 《引用文献》

- (1) 文部省 『中学校学習指導要領（平成10年12月）解説 - 数学編 - 』 平成11年 大阪書籍 P2
- (2) 文部省 『中学校学習指導要領（平成10年12月）解説 - 数学編 - 』 平成11年 大阪書籍 P4
- (3) 中原 忠男 『算数・数学教育における構成的アプローチの研究』 平成10年 聖文社 P203
- (4) 文部省 『中学校学習指導要領（平成10年12月）解説 - 数学編 - 』 平成11年 大阪書籍 P5

## 《参考文献》

- ・ 根本 博 『中学校新教育課程の解説 数学』 平成11年 第一法規出版
- ・ 根本 博 『中学校数学科 数学的活動と反省的経験』 1999年 東洋館出版社
- ・ 中原 忠男 『算数・数学教育における構成的アプローチの研究』 平成10年 聖文社
- ・ 下村 勉 『総合評価法による授業改善』 1999年 三重大学教育実践総合センター
- ・ 長谷川勝久 「数学科における構造学習法」『数学教育』 1999年 明治図書
- ・ 古藤 怜 「表現力を育成するために」『中等教育資料』 平成13年12月号 文部科学省
- ・ 古藤 怜 『コミュニケーションで創る新しい算数学習』 平成10年 東洋館出版社