Ｉ－１　高等学校数学

１　研究主題

高等学校における数学科学習指導方法の改善に関する研究
―数学史、課題学習を取り入れた授業を通して―

＜内容の要約＞

生徒の数学に対する意識調査を実施し、その集計と分析を試みた。その結果、普通高校では「興味がある」という意識に比べ「得意感」「有用感」が低く、専門高校では「興味」「得意感」がかなり低いことが分かった。

そこで、「興味」「有用感」をもたせるような授業の必要性を感じ、数学史や課題学習を取り入れた教材の開発及び授業の実践を行った結果、生徒の数学に対する興味・関心を喚起する事ができることが分かった。

＜キーワード＞

(1)高等学校数学　(2)数学史　(3)課題学習　(4)教材開発　(5)意識調査

２　研究の目標

学習意欲を高める数学科学習指導方法の改善に向けて数学史、課題学習を取り入れた授業の在り方を探る。

３　研究の仮説

数学の授業における導入や展開の中で、数学史や課題学習を取り入れた学習指導を行えば、生徒の数学に対する興味・関心が高まるであろう。

４　研究の内容と方法

(1)　研究の内容

ア　生徒の実態調査を行う。

イ　教材の開発及び指導の実践を行う。

(2)　研究の方法

ア　生徒の数学に対する意識調査とその分析を行う。

イ　数学史や課題学習を取り入れた教材を開発する。

ウ　授業を実施し、数学に対する興味・関心についての検証を行う。

５　研究の実際

(1)　生徒の数学に対する意識調査の結果と考察

本研究委員会では､県内の高校生が数学に対してどのような意識をもっているのかを調査するために､質問紙法によるアンケートを実施した(1999年７月実施)｡対象は､普通高校､専門高校の高校２年生364名である。

評価の方法として、授業後に生徒の知識や技能の有無を量的にとらえることも重要であるが、指導計

画を立てる際に生徒の興味・関心や見方・感じ方などの生徒の実態をとらえることも重要であると考え、アンケートを実施した。以下に、その調査結果と考察を述べる。

普通高校

ア　数学への興味

「質問１　数学に興味がある。」では、興味があると回答した生徒は半数にも満たない。受験のためだけでは生徒の興味を惹くことはできなくなってきている（図１）。

イ　数学に対する得意感

「質問２　数学が得意である。」では、不得意と思っている生徒が得意と思っている生徒の倍近くおり、テスト等で納得いく点数がとれないことからか、または内容を難しいと感じていることからくる心境であろう（図１）。

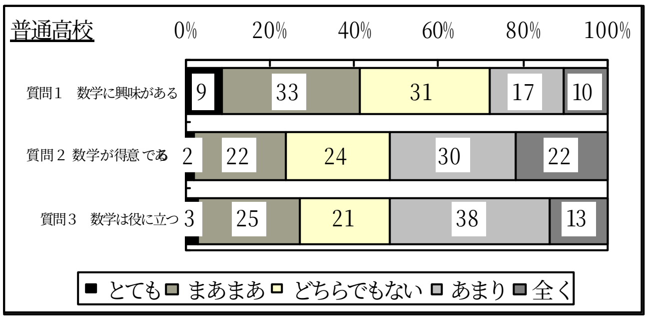

図１　調査結果Ｉ

ウ　数学の有用感

「質問３　数学は実社会に役に立つか。」では、半数以上の生徒が役に立たないと思っていることが分かる。抽象的な数学と実社会で使われている数学とのつながりが見えにくくなっているためであろう。

また、大学入試とのつながりが強すぎて実社会とのつながりを見えにくくさせていると思われる（図1）。

エ　数学に苦手意識をもった時期とその理由

「質問４　数学に苦手意識をもった時期。」では、中学１年生になると小学５～６年生の２倍、高校生になると中学３年生の 2.8 倍にはね上がってる。また、その理由（質問５）としては「内容が難しい」が際だって多い。授業形態や進度の大きな変化に戸惑う生徒への対応が大切である（図２、３）。

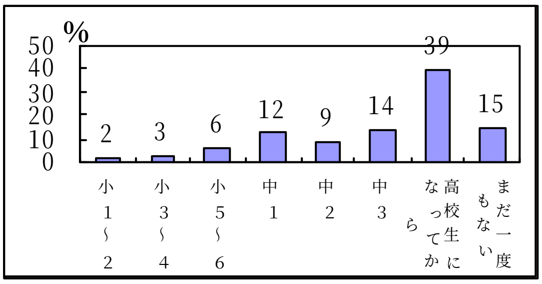

図２　苦手意識をもった時期

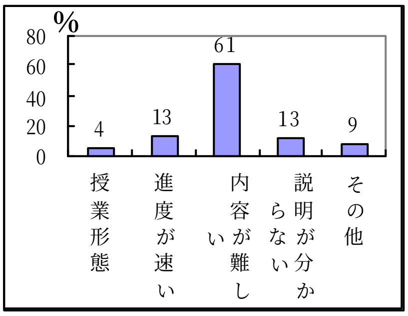

図３　苦手意識をもった理由

オ　数学に面白みを感じるとき

「質問６　数学に面白みを感じるとき。」では、数学のもつ魅力の一つである問題が解けたときの達成感に面白みを感じているようだが、思考の面白さ、図や式の美しさなど数学のもつ他の魅力に惹かれているものは少ない。教師側にも先を急ぐあまりにそれを伝え忘れている面もあるようだ。教師も生徒もその魅力に浸るひとときを持つゆとりがほしい（図４）。

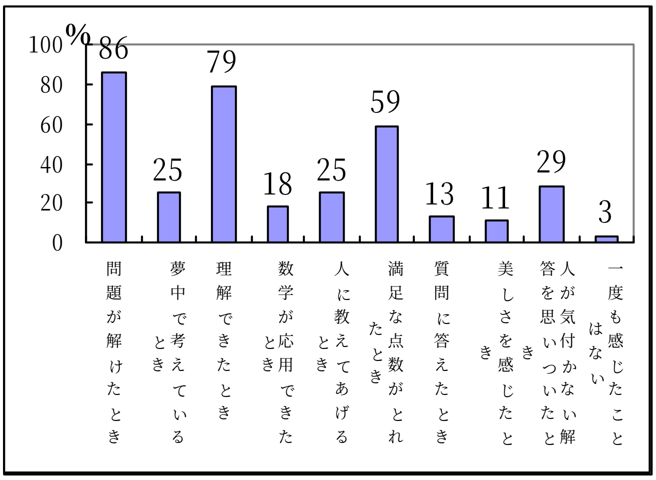

図４　面白みを感じるとき

以上のことから、普通高校では受験を前提とした授業の進め方をしているが、それに対しての生徒の興味が薄れていることが分かった。

そこで、数学が「わかる」「できる」「役に立つ」という達成感、有用感を味わわせることが「興味が

ある」という生徒を増やすことにつながるのではないだろうか。

専門高校

ア　数学への興味

　数学への興味は極端に低い（図５）。数学よりも専門教科の方により興味があるのではないだろうか。

イ　数学に対する得意感

　アと同様にかなり低い（図５）。数学は積み重ねていく学問であるので、分からないと感じた時期が早いほどその回復も遅くなる。生徒の習熟度に応じた課題等で「分かる」「できる」という達成感を味わわせることが必要だろう。

ウ　数学の有用感

　「数学は実社会で役に立つ」と回答した生徒の割合は、普通高校よりも多かった（図５）。 日頃、実社会で役立つ専門教科を学習しているため、教科と実社会とのつながりが強いと感じ、そのような意識となったのではないだろうか。

エ　数学に苦手意識をもった時期とその理由

　小学校までで40%、中学校までで89%の生徒が苦手意識を抱いていることがわかる。また、その理由としては「内容が難しい」が際だっている。早い時期から苦手意識を抱いている生徒が多く、多くの内容を未消化のまま学年を重ねてきている生徒がいるように思われる（図６、７）。

オ　数学に面白みを感じるとき

　普通高校と同様に解けたときの達成感や理解できたときの喜びに数学の面白さを感じているようだ。

　以上のことから、専門高校では数学に興味を失っている生徒たちを、まず数学の方に意識を向けさせることから始めなくてはならないだろう。

　他の教科に生かせるような内容であるとか、身近な内容であるとか、今までの数学では扱わなかった内容等を取り入れて、「今までの数学と違うぞ」「自分にも分かる」「自分にもできる」という感じを味わわせることが興味をもたせることにつながるのではないだろうか。

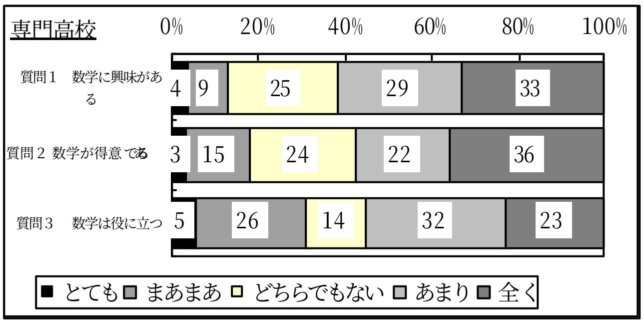

図５　調査結果Ⅱ

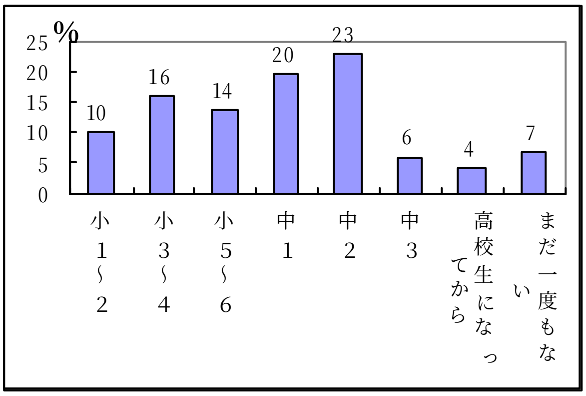

図６　苦手意識をもった時期

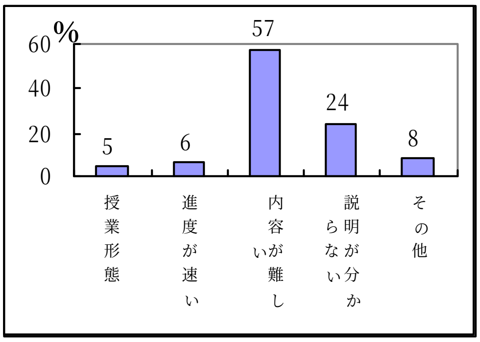

図７　苦手意識をもった理由

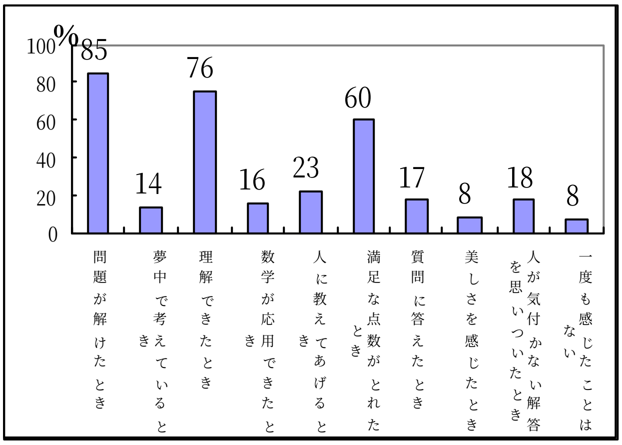

図８　面白みを感じるとき

(2)　数学史・課題学習を取り入れた授業

ア　折り鶴の幾何学(専門高校における授業実践)

(ｱ)　教材のねらい

我々の生活の中で日頃何気なく思っているところに数学的な要素が含まれていることがある。ここでは、日本的な遊びとして身近に慣れ親しんでいる折り鶴を題材に取り上げ、創作活動を多く取り入れながら、その幾何学的な要素を発見させ、幾何学的知識(内心や角の二等分線の性質)を理解させる目的である。また、一般的な正方形の折り紙から他の四角形で鶴を折るという発展的な課題に対し、生徒が主体的に取り組み創意工夫するのがねらいである。単元としては、数学Ａの平面幾何の内容と関連しているが、単元にこだわらず課題解決的な学習として実施する。

(ｲ)　展開

まず、普通の折り紙で鶴を折らせ、鶴の基本形(図９)の展開図が角の二等分線でできていることを気づかせる(図10)。
次に、三角形を用いて角の二等分線の性質について、次のことを理解させる。３頂点からの角の二等分線は１点で交わり、内接円の中心(内心)となる。この３本の二等分線と内心から１辺へおろした垂線を使って紙を平坦に折ることができる。このとき３辺は一直線上に重なる(図11)。

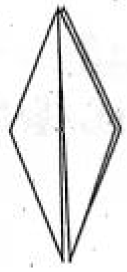

図９　鶴の基本形

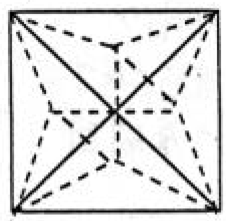

図10　鶴の基本形の展開図

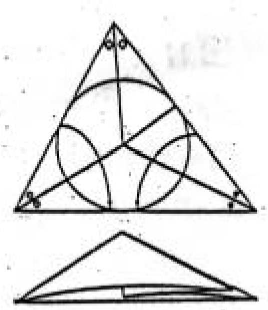

図11 三角形の角の二等分線による平坦折り

指導上の留意点・・・ここでは、生徒が作業を通して自ら気づくように留意しながら発問していくことが必要である。また、四角形の場合は角の二等分線が１点で交わるとは限らないこともいろいろな四角形を実際折らせてみて確認させる。

続いて第二のテーマである正方形以外での折り鶴の作成に移る。まず、ひし形で鶴を折らせる。

指導上の留意点・・・この場合は、正方形の場合と同様にして折ることができるので、特に折り方を説明せず生徒の自主性に任せる。

次に、はた形(たこ形)で鶴を折らせる。
まずひし形の場合と同様に、各自で試行錯誤しながら折ってみる。今回は正方形の場合と同じように折っていくと鶴の首尾を持ち上げるところでうまくいかないことに気がつく。そこで、はた形の正しい折り方を説明し、説明に従って鶴を折らせる。そして、鶴の鶴心(背中のとんがりになる点)がどんな点であるか考察させる。実際、この点は左右対称となる対角線とその左右の三角形の内心を結ぶ線の交点である(図12)。

最後に、内接円を持つ四角形ならば、鶴が折れることを述べ、他の四辺形で鶴を折った例を紹介する(図13)。

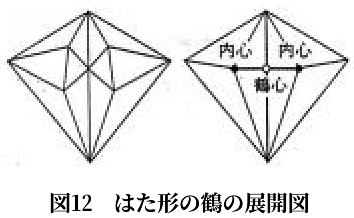

図12　はた形の鶴の展開図

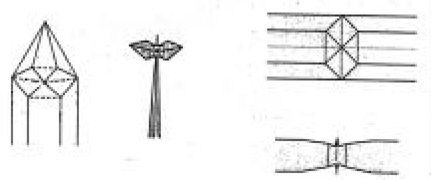

図13　開いた四辺形による折り鶴の例

(ｳ)　考察

実際に授業を行ったところ、生徒は楽しみながら進んで作業していた。普段の授業より、意欲的に取り組んでいたようだ。単なる折り紙の時間になるのではないかと心配していたが、授業後アンケート（自己評価）を行った結果（図14）では、内容は難しかったと感じている生徒のほうが多かった。それでも、自らよく考え、内容はよく理解できたという感想だった。自ら数学的思考活動に取り組むという実践を行ったので、知的好奇心と創造的感性を引き出したのではないだろうか。

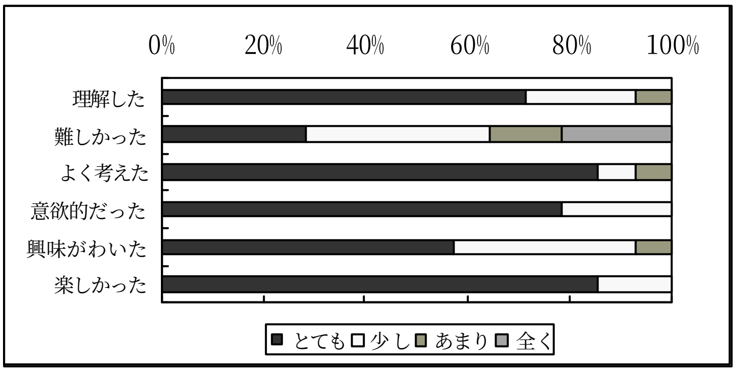

図14　授業後の生徒の自己評価

イ　無限の算術（普通高校における授業実践）

(ｱ)　教材のねらい

数学Ⅱの微分に入る前までは特に注意を要しない数の加減も、無限という概念が入ってくると注意を要する。極限については、高校段階では深入りせず「限りなく近づく」という表現にとどまっている。歴史的に見ても同様であり、微分積分学を創造したニュートンやライプニッツをはじめとして、後に続く数学者たちは極限の厳密な定義は後まわしにして、「限りなく近づく」という程度の理解で微分積分学を創り上げた。そしてそれを力学や物理学に応用して、自然のかくれた法則を次々に発見していった。厳密な定義が与えられたのは 1821 年にコーシーによってである。ここでは、古代ギリシャの時代から数学者を用心深くさせ、また、悩ませた無限の算術についてふれてみたいと思う。数学Ⅲの極限の導入として実践してみてはどうだろう。

(ｲ)　展開

まず、古代ギリシャのソフィストの一人であるエレアのゼノン（B.C.５世紀頃）が逆理の形で言い表した有名な「アキレスと亀」を生徒に紹介する。

駆け足の選手アキレスが亀に追いつこうとして走っている。亀の出発点にアキレスが来たとき、亀は少し動いている。更にその位置までアキレスが来たとき、亀はまた少し先まで動いている。こう考えると、アキレスは永久に亀には追いつけないはずである。

運動というものが起こる限り、無限という概念を避けることはできない。古代ギリシャの時代から数学者を悩ませたこの逆理でもって、生徒の中に一種の混乱と用心を引き起こすのがねらいである。できるだけ生徒の意見・感想を聞きたい。

次に、生徒が取り組みやすい例で無限を考えさせる。

例１　電卓で計算すると　$1\div3\times3=0.9999999\cdots$　となる では、$1=0.9999999\cdots$　なのだろうか。

解１］　$x=0.9999999\cdots$　・・・①とおくと

$10x=9.9999999\cdots$　・・・②

②－①より　$9x=9$

$\therefore\quad x=1$

解２］　$1\div3=0.333333\cdots$　だから

$1/3=0.333333\cdots$

両辺を３倍して

$1=0.9999999\cdots$

解３］$0.9999999\cdots=0.9+0.09+0.009+0.0009+\cdots$　であり、右辺は初項 0.9、公比 0.1 の無限等比級数の和であるから、左辺＝ $\dfrac{0.9}{1-0.1}=1$

例２　$1-1+1-1+1-1+1-1+\cdots$を求めよ。

生徒の解答例１］与式＝（１－１）＋（１－１）＋（１－１）＋・・・

＝０

生徒の解答例２］与式＝１＋（－１＋１）＋（－１＋１）＋（－１＋１）＋・・・

＝１

生徒の解答例３］　$x=1-1+1-1+1-1+1-1+\cdots$　とおくと

$x=1-(1-1+1-1+1-1+1-1+\cdots)$

$=1-x$

$2x=1$だから　$x=\frac{1}{2}$

生徒からの解答がでないときは、解答例の１から３を提示する。

無限級数の導入としてこの「無限の算術」を生徒に体験させることは、「無限」に用心させる、興味・関心をもたせるという点では、非常に効果的であると思う。この無限という怪物を飼い慣らして、正しい理論を創り上げげたのはコーシーであり、彼は無限級数の和は存在しないこともあり得ることや、無限級数の和を求めるには順序を勝手に変えてはいけないこと等、新しい考え方を持ち込んだということを最後に生徒に付け加える。

(ｳ)　考察

実際に授業を行ったところ、案の定、生徒の頭の中には少々混乱が生じた。しかし、生徒たちはその混乱を楽しんでいるようでもあった。無限が引き起こすいろいろな奇怪事に直面し、確かに生徒たちは興味・関心をもったといえる。図15は生徒たち（33人）の授業後の感想（自己評価）をいくつかに類型化したものである（複数回答）。感想もいくつか紹介する。

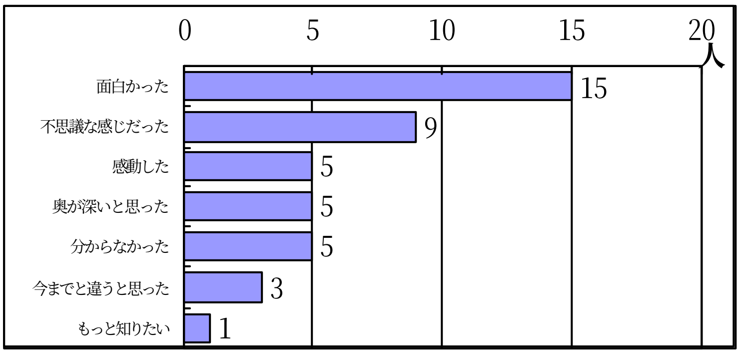

図15　授業後の生徒の自己評価

「久しぶりにちょっとおもしろいと思いました。いろいろな解法を思いついたときは気持ちいいものがありました。」「簡単そうで意外と奥が深かったが、それがまた面白い。」「無限級数の意味で頭が混乱したが、考え方はとても面白いと思った。今から面白くなりそうだ。」「 0.999･･･＝１という不思議な式とは、中学１年生の頃初めて出会った。今までこの疑問が解けずにいたが、今日ようやくその答えが分かった。無限という概念は非常につかみにくいけれども、分かればたぶん面白いだろう。」

ウ　正五角形と黄金分割（普通高校における授業実践）

(ｱ)　教材のねらい

正五角形を通して黄金比を知り、その美しさや神秘性を知らせる。また、その歴史やいろんなところで活用されていることを知らせる。数学Ⅰの三角関数の後に実践してみてはどうだろう。

(ｲ)　展開

黄金分割とは、自然や美術作品の形態美を規定している各種の比の中で、古来、最も理想的とされ、その意味で特に黄金の名を冠されてきた比例法のことである。もともとは、ユークリッドの原論の第２巻の命題「ひとつの線分を大小二つに分かち、小さい方の線分と全線分とでできた矩形を、大きい方の線分でできた正方形に等しからしめること」から出たものである。その特殊な性質が古来、数学者や美学者の異常な興味をひき、一般に流布した。

また、黄金比を与える比　１：（１＋ $\sqrt{5}$ ）／２　を黄金比と呼ぶ。
黄金比の起源は、遠くエジプトの古王国時代あるいはもっと古くまでさかのぼりうるが、この比率が特に考古学者や美学者の間で学問的に重視されるようになったのは、特に、古代文化への思慕が高まり、その研究が盛んになった文芸復興期以降の現象で、黄金の名を冠するようになったのは近世になってからのことである。

中世では、この比例は極度に神秘化され、神意によって授けられた秘宝であるとして、神授比例法と呼ばれていた。15 世紀の末にフランチェスコ教団の僧フラ・ルカ・パチリオが、レオナルド・ダ・ビンチの挿図を附して著した黄金比に関する書物には、この題名が冠されている。

まず、定規とコンパスで正五角形の作図をする。

①一辺が与えられたときの正五角形を作図しよう。 ②円に内接する正五角形を作図しよう。

そして、作図した正五角形の中の黄金比について調べさせる。

さらに、生徒には次のような課題を与える。

課題：一辺の長さが２の正五角形について、自分で問題を作り、さらにその解答を作成しなさい。

ここでは、問題を作ったり解いたりすることで、正五角形や黄金比についての理解を深めさせるのがねらいである。

つぎに、自然界や芸術界の中の黄金比を紹介し、その神秘さを味わわせたい。

ａ　フィボナッチ数列と黄金比

フィボナッチ数列：１、１、２、３、５、８、13、21、34、・・・ において、隣り合う二つの数の比を調べると次のようになる。

１／１＝１、　２／１＝２、　３／２＝1.5、　５／３＝1.666･･･、　８／５＝1.6
１３／８＝1.625、　２１／１３＝1.6153･･･、　３４／２１＝1.6190･･･

黄金比（１＋$\sqrt{5}$　）／２＝ 1.6180･･･　より大きな数と小さな数が交互に現れながら次第に近づいている様子がわかる。最も美しい比例と自然の中に存在するフィボナッチ数列との関係はまさに神秘としか言いようがない。

ｂ　自然の中の黄金比

木の枝の出方、松かさのリン片、ひまわりの種子の配列（フィボナッチ数列に従っている)、オウムガイの貝殻、台風の渦、星座（猟犬座）の渦巻き星雲等。

ｃ　芸術・建築の中の黄金比

(a)　ピラミッド（クフ王）の底面（正方形）の１辺の長さ 230 ｍと高さ 146 ｍ。
　　これは、フィボナッチ数列の第 12 項 144 と第 13 項 233 とほぼ合致している。

(b)　パルテノン神殿の横の長さと高さ。

(c)　ミロのヴィーナスにおける人体比例
　　彫刻ミロのヴィーナスや絵画アングル作「泉」に描かれている人体像におけるへそまでの高さとへそから頭の頂上までの高さの比がほぼ黄金比となっている。

(d)　能で使用される能面の顔の縦と横の長さ

(e)　焼き物
　　茶道で使用する抹茶椀黄瀬戸の直径と高さの比が黄金比になっている。

(f)　五八の比
　　葛飾北斎の「富嶽三十六景」の縦と横の長さの比が５：８。
　　また、徳川家康の家来で作業奉行を勤め、また、大茶人で建築・作庭の巨匠でもあった小堀遠州の作品は、見た目にきっぱりと美しい黄金比の近似値である５：８の比例に基づく整然とした均斉

がとれている。

日本では、この比を「五八の比」と呼んでいる。具体的には、小堀遠州の箱書き、隠居所として建てた弧篷庵の中に三つの茶席、山雲床、直入軒、忘筌が残っており、忘筌では五八の比を基にして設計されている。

小堀遠州の作ではないかといわれている「桂離宮」にも至る所に黄金比が見いだされる。

(ｳ) 考察

図 16 は生徒（32 人）の授業後の感想（自己評価）をいくつかに類型化したものである（複数回答）。正五角形やフィボナッチ数列を通して黄金分割の魅力に迫ったが、自然と数学のつながりや芸術の中の数学にふれ、数学の文化的な価値や数学の有用性を味わわせることができたと思う。

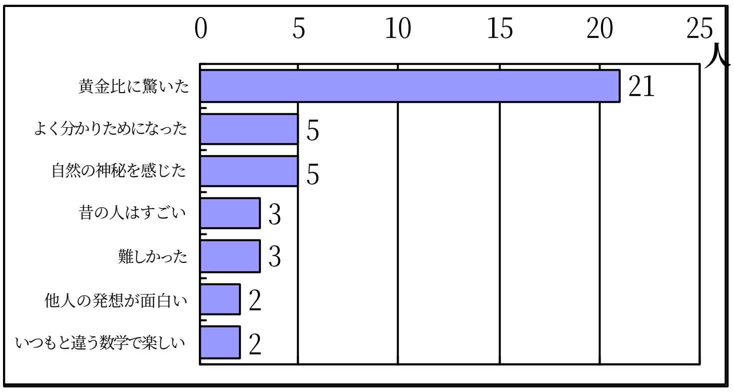

図16 授業後の生徒の自己評価

生徒の感想もいくつか紹介する。

「単なる五角形が特別なものになったような気がした。考え方も計算も難しかった。」「黄金比が五角形の中にあったり、有名な絵の中にあったりしたのでびっくりした。新しい発見になっし、知識としても身に付いた。」「身近なところにこんなにたくさん黄金比が使われていたので驚いた。」「フィボナッチ数列と自然との関係がとても神秘的に感じた。」「みんなが作った問題には、レベルも作った視点も様々で面白いものがあった。」等、興味・関心が高まったといった感想が多かった。

(3) 数学史、課題学習を取り入れた教材開発

(2)において三つの実践事例を紹介したが、ここでは「数学史」を取り入れた指数の導入例を紹介する。

● 指数について

ア 教材のねらい

自然界で基本的で大切な役割を果たしている指数関数・対数関数も生徒にとっては苦手なものの一つである。それは、生徒が苦手意識を持つ主な原因として、次のことが理解できていないからだと推察した。

① 指数法則から天下り的に与えられる $a^{m/n}$ 等の定義（約束）

② 対数の意味・定義、記号logへのアレルギー

③ 逆関数の意味

このような原因を解消するためには、まずは①に絞り、指数の概念や記号がどのような時代的要求、数学的要求で誕生したのかを知らせることにより、どうしてそのような定義（約束）をする気になったのかを理解させる必要があると考えた。そこで、数学史を導入に用いることにより、無味乾燥な指数・対数を人間化していこうと試みた。

イ 展開

江戸時代に吉田光由の書いた『塵劫記』という数学書がある。その中に、ネズミが増える計算についての記述がみられる。それを現代の言葉に直すと次のようになる。

正月に雌雄１組のネズミがいて、子供を12匹産む。その子供の雌雄は同じ数であるとする。
さて、このネズミは２月になると、親も子もみな子供を12匹ずつ産む。それで親子共に98匹になる。こうして、月に１度ずつ、親も子も孫も12匹ずつ子供を産むと、１年の終わりにはネズミの数は合わせて何匹になるだろうか？

この問題は「ネズミ算」とよばれている昔から有名な問題である。そこで、各月のネズミの数を考えていく（生徒に計算させる）。ネズミが１か月間で７倍に増えていくことになるので12か月目には$14×7^{11}$匹となり、実際計算すると、$14×7^{11}$＝27682574402匹となり、1年間でほぼ300億匹という超群団になる。毎月、７倍ずつ増えていったとしても300億とは、はるかに予想を上回る結果になったと思う。

このような具体例を通して、まずは指数世界の指数的変化を現実的にきちんととらえさせることが大切である。また、そのことが、後にでてくる指数関数の増加率を考えるうえで大切なイメージとなってくる。人間の感覚は、きわめて場当たり的にできていて、そのまま直線的に未来を考えようとする。正比例というのは、人間の感覚にぴったりなので単利で解釈したくなるのである。正比例は加法感覚の世界であって、人間の感覚は加法的なのである。しかし、本当のところは、刺激と感覚の関係は乗法的なのである（感覚は刺激の対数に比例するというフェヒナーの法則がある）。むしろ正しくは、無理に加法的に解釈しようとする性癖があると言うべきだろう。

さて、指数世界のイメージが少し見えてきたところで、この指数の考え方や記号法は、いつ頃から考えられていたのかを数学史でみてみると、古代バビロニア文明の損得の問題から起こってきていることが確認でき親近感がもてる。

べき指数の起源は古代バビロニアにみられたわけだが、その後の数学史をながめると、a、a^2、a^3という自然数のべき指数から、さらに進んで、a^0、a^{-3}、$a^{1/2}$などのように整数や分数、つまり有理数のべき指数まで拡張されていった過程をみることができる。そのいずれの時代においても数学者達は、数の概念を拡張していくときに目をつけた共通な法則がある。

例えば、数列$\{2^n\}$（$n∈N$）において、べき指数nの数列と2^nの数列との関係をみてみると、前者は公差１の等差数列、後者は公比２の等比数列という関係になっている。このように、等差に対しての等比という両数列の関係に着眼し、この一定倍の変化の法則性を有理数の指数まで拡張、保持していった。このことは、先の具体例で言うと、一定の期間（時間）に一定の倍率で変化するということに言い換えられるわけである。

ところで、日本においてはかつてO－157が猛威をふるっていたが、先の法則性は、これら細菌の増え方において、最も特徴があり、また大切な考え方になってる。

そこで、この法則をはっきりさせるために、５㎎ある細菌が１時間経過すると２倍になるという変化を考える。ここで注意しておきたいのは、細菌の増殖の場合、いきなりパッと２倍に増えていくのではなく、全部で数百万個の細菌がジワジワと増えていく。だから、途中の時間、例えば、10分後や40分後についても細菌は増え続けているのである。

さて、この細菌の増殖で、１時間ごとの重さを指数を用いて表すと、１時間後は5×2㎎、２時間後は$5×2^2$㎎、３時間後は$5×2^3$㎎、４時間後は$5×2^4$㎎となり、X時間後の重さをY㎎とすると、
$Y＝5×2^X$ …＊　という式が成り立つ。

ここで＊において、Xが0、－1、－2、－3、…　と変化していくのは、0時間後（つまり、最初の時）を基準にして、１時間前、２時間前、３時間前、…　と想定していくことになる。そこで、先にも述べたように一定の時間に一定倍率で変化するという法則を適用させると、つまり、１時間で２倍という倍率は、逆方向にみれば－1時間で1/2倍という倍率なのでもあるわけだから、$5×2^0$＝５㎎、$5×2^{-1}$ ＝5/2 ㎎、$5×2^{-2}$＝ 5/4 ㎎、$5×2^{-3}$＝ 5/8 ㎎、…　とならなければいけない。要するに、このことから、$2^0＝1$、

$2^{-1}=1/2$ 、$2^{-2}=1/4=1/2^2$ 、$2^{-3}=1/8=1/2^3$ でなければならず、
一般的にも$a^0=1$、$a^{-k}=1/a^k$（$a\neq 0$）と定義されるわけである。

次に、$2^{1/2}$ などのように、指数が整数ではなく、分数になったら、その値はいったいどう考えたらいいのだろうか？ たとえ時間間隔が変わろうとも、一定の時間に一定の倍率で変化するという法則は保たれているわけである（なぜならば、重さＹの数列は等比数列なので明らかに言えることなのである)。

このことを指数ｘが分数の場合にも適用してみる。式＊において、$X=1/2$ のとき、つまり1/2時間後（30分後）の細菌の重さＹは、$Y=5\times 2$㎎と考えてよい。そこで、今度は1/2 時間ごとに細菌がａ倍という一定の倍率で変化すると考えると、$5\times a\times a=10$ となり、これより$a^2=2$、つまり$a>0$なので $a=\sqrt{2}$ となる。したがって、1/2 時間後の細菌の重さは$5\times 2=5a=5\sqrt{2}$ ㎎となり、このことより、$2^{1/2}=\sqrt{2}$ となる。同様にして 1/n 時間後を考えると、$2^{1/n}=\sqrt{2}$ 、
$2^{m/n}=\sqrt{2^m}$ 、$2^{m/n}=(2^{1/n})^m$となる。

さて、以上のことを一般的にまとめてみる。初めにA㎎の細菌があって、１時間ごとに重さがａ倍になるとすると、X時間後の重さY㎎は、$Y=A\times a^X$と表される。このとき、同様な考え方で、
$a^{1/n}=\sqrt{a}$ 、$a^{m/n}=\sqrt{a^m}$ 、 $a^{m/n}=(a^{1/n})^m$ となり、指数が分数になっても法則性を保たせることにより、意味が定められるのである。

自然のなりゆきとして、有理数指数の次に考えたくなるのは、指数ｘが無理数の場合ではないだろうか。歴史的にみてもそのようである。例えば、2^2のような値は、どう考えればよいのだろうか？

では、「その先の指数は？」となれば、やはり複素数指数であろうか。「興味のある人は研究してみてください。」と生徒に促す。

6 研究のまとめと今後の課題

(1) 研究のまとめ

ア 意識調査から

今回行った意識調査から、数学に対する生徒の意識が普通高校と専門高校ではかなり違うことが分かった。

普通高校では、「興味がある」という意識に比べて、「得意である」という意識が低かった。また、「実社会で役に立つ」と思っている割合は３割にも満たない。さらに、高校に入ってから苦手意識をもつ生徒が多いことが分かった。大学入試を視野に入れた授業が多い中で、教師も生徒も数学のもついろいろな魅力を感じる余裕のなさを感じる。

このことから、「できる」「分かる」という実感をもっと味わわせることが重要であり、試験のためだけでない数学の有用性に気付かせるような授業への改善を図るべきであろう。

専門高校では、中学までで９割の生徒が苦手意識を抱いたことがあることが分かった。数学に興味があると回答した生徒は13%しかいない。また、数学に面白みを感じたことがないと回答した生徒は８％もおり、生徒にとって数学は難しく、分かりにくい教科になっている。

そこで、生徒を数学に惹きつけるためには、「今までの数学と違うぞ」「何か面白そうだ」「自分にもやれそうだ」という実感を味わわせることが大切であると考える。

イ 数学史、課題学習を取り入れた授業実践から

普通高校では、数学史、課題学習を取り入れた授業ということで、無限に関することと黄金分割に関する教材を選んで授業を実践したところ、難しかったという感想もいくらかはあったものの生徒の反応は「奥が深く驚いた」「自然の神秘を感じ感動した」「いつもと違う数学で楽しい」「今から面白

くなりそうだ」というものもあり、数学の「文化的な価値」や「有用性」も伝えられたと思う。

専門高校では、「今までの数学とは違うぞ」という感じを味わわせるために、日本の伝統文化で世界にも有名な折り紙を教材に選んだところ、「理解した」「よく考えた」「意欲的だった」「楽しかった」というような反応を示し、生徒の心をつかんだ授業であったと思う。

以上のように、「数学史」「課題学習」を取り入れた授業は、生徒の数学への興味・関心を引き出し、更に学習意欲を高めることにつながることが分かった。

(2) 今後の課題

授業時数の縮減に伴い学習内容の厳選が叫ばれている現在、日々の授業の中に課題学習を多く取り入れることは、各学校のカリキュラム等を考えると難しい面もあると思う。しかし、単元と単元の間とか単元に関連する課題学習を教材にすれば、より効果的であろう。

また、数学の授業に数学史を取り入れるという観点は、「数学の文化的価値」を伝えるうえでも重要であるが、日々の授業の中にそれを取り入れることで教材研究の重要性がますます増すと思われる。数学を教える喜びを抱いた教師自身の数学に対する熱情を一層喚起することがより重要であると考える。

さらに、「数学史」や「課題学習」を取り入れた授業は興味・関心を喚起することにつながることが分かったが、数学の授業は基礎・基本を定着させることが重要である。「いつもと違うから楽しい」ではなく、毎日の授業で生徒の学習意欲が高まるように「数学史」「課題学習」をどうつなげていくかが今後の課題である。

《研究委員》

本山　弘満	佐賀県教育センター指導主事	平成11年度
陣野公一郎	佐賀県立鹿島高等学校教諭	平成11年度
野村　弘文	佐賀県立伊万里農林高等学校教諭	平成11年度
矢ヶ部清	佐賀県教育センター指導主事	平成10年度

《参考文献》

- 文部省編　『文部時報』 2000 年２月臨時増刊号　文部省
- 藤岡完治編　『評価で授業を変える』　1997年　ぎょうせい
- 川崎　敏和　「折り鶴進化論」『物理科学雑誌パリティ』　1998年11月号　丸善
- 川崎　敏和　『バラと折り紙と数学と』　1998年　森北出版
- 遠山　啓　『数学入門（下）』　1960年　岩波書店
- 仲田　紀夫　『課題学習と数学授業の改善』　1991年　東洋館出版
- 佐藤　健一　『（要説）数学史読本』　1996年　東洋書店
- 片野善一郎　『数学史を活用した教材研究』　1992年　明治図書
- 銀林　浩　『実験数学のすすめ』　1993年　国土社
- 秋山　仁他　『秋山仁と算数・数学不思議探検隊』　1994年　森北出版
- 秋山　仁他　『コンビニで数学しよう』　1998年　森北出版
- 柳　亮　『黄金分割』　1999年　美術出版社
- 柳　亮　『続黄金分割－日本の比例－』　1999年　美術出版社
- 森　毅　『指数・対数のはなし』　1989年　東京図書
- カジョリ　『復刻版カジョリ初等数学史（小倉金之助補訳）』　1997年　共立出版