中学校数学科 実践事例Ⅲ　第３学年「関数 $y=ax^2$」（全 16 時間）

１　単元について

（1）　単元の目標

①　関数 $y=ax^2$ についての基礎的な概念や原理・法則などを理解するとともに，事象を数学化したり，数学的に解釈したり，数学的に表現・処理したりする技能を身に付ける。

②　関数関係に着目し，その特徴を表，式，グラフを相互に関連付けて考察し表現することができる。

③　関数 $y=ax^2$ について，数学的活動の楽しさや数学のよさを実感して粘り強く考え，数学を生活や学習に生かそうとする態度，問題解決の過程を振り返って評価・改善しようとする態度を身に付ける。

（2）　単元の評価規準

知識・技能	思考・判断・表現	主体的に学習に取り組む態度
①関数 $y=ax^2$ について理解している。 ②事象の中には関数 $y=ax^2$ として捉えられるものがあることを知っている。 ③いろいろな事象の中に，関数関係があることを理解している。	①関数 $y=ax^2$ として捉えられる二つの数量について，変化や対応の特徴を見いだし，表，式，グラフを相互に関連付けて考察し表現することができる。 ②関数 $y=ax^2$ を用いて具体的な事象を捉え考察し表現することができる。	①関数 $y=ax^2$ のよさを実感して粘り強く考えようとしている。 ②関数 $y=ax^2$ について学んだことを生活や学習に生かそうとしている。 ③関数 $y=ax^2$ を活用した問題解決の過程を振り返って評価・改善しようとしている。

（3）　指導と評価の計画（全 16 時間）

時間	学習活動	重点	記録	評価
1	・物体が斜面を転がるときの事象を基に変化する二つの数量に着目し，これまでに学習していない関数関係があることを知る。	知 態	 ○	知① 態②
2	・具体的な事象から関数 $y=ax^2$ の変化の特徴について理解する。	知		知②
3	・関数 $y=ax^2$ の二つの数量の関係について，表の値からグラフで表す。 ・振り返りシートに分かったことや疑問などを記述することを通して，その後の学習を見通す。	知 態	 ○	知② 態①
4	関数 $y=ax^2$ の二つの数量の関係を表す表，式，グラフの相互関係について考察することを通して， ・関数 $y=ax^2$ の特徴を見いだし表現する。 ・関数 $y=ax^2$ の特徴に基づいて，グラフで表す。	 知	 ○	思① 知②
5 6 7	・関数 $y=ax^2$ の比例定数 a の符号と絶対値の大きさに着目し，式とグラフを相互に関連付けて考察することを通して，関数 $y=ax^2$ のグラフの特徴を捉える。	思	○	思①
8	・変域を考える必要がある問題に取り組むことを通して，変域のあるグラフをかくことができるようにするとともに，x の変域から y の変域を求める。	知	○	知②
9	・式から表やグラフをつくることを通して，関数 $y=ax^2$ の変化の割合について理解し，関数 $y=ax^2$ の表の値から変化の割合を求める。	知		知②
10	・具体的な事象から時間と距離の関係を考察することを通して，平均の速さについて理解する。 ・振り返りシートに分かったことや疑問などを記述することを通して，その後の学習を見通す。	知 態	 ○	知② 態①
11	・自由落下の事象から，変化する二つの数量に着目し，表，式，グラフを相互に関連付けながら問題を解決する。	思		思①②
12 13	・具体的な事象から二つの数量を取り出し，表，式，グラフを基にして考察し表現する。	思	○	思②
14	・放物線と直線について，これまでの関数の学習を活用して，グラフと式を関連付けながら問題を解決する。	思	○	思①
15	・具体的な事象から二つの数量を取り出し，関数の表やグラフを用いて考察することを通して，式に表すことが困難な関数を学ぶことで，関数の概念の広がりを実感する。 ・振り返りシートに分かったことや疑問，問題の解決に有効であった方法などを記述することを通して，学習の成果を実感する。	知 態	 ○	知③ 態②③
16	・単元全体の学習内容についてのテストに取り組み，単元で学習したことがどの程度身に付いているかを自己評価する。 ・振り返りシートに分かったことや疑問，問題の解決に有効であった方法などを記述することを通して，問題解決の過程を振り返って評価・改善する。	知 思 態	○ ○ ○	知①～③ 思①② 態②③

２　本単元における「深い学び」の姿

数学的な見方・考え方を働かせながら，二つの数量の変化や対応を調べることを通して，事象を理想化したり単純化したりすることで，関数 $y=ax^2$ として捉え，表，式，グラフを相互に関連付け，自分の表現を他者の表現と比較しながら問題解決に向けて自らの理解を深めている姿。

３　「深い学び」を実現するためのポイント

ポイント(1)　**数学的活動の一層の充実を図るために，算数・数学の問題発見・解決の過程を学習過程に反映する。**

ポイント(2)　**生徒が数学的な見方・考え方を自ら働かせることができるように，各学習過程に応じた働きかけを行う。**

４　ポイント(1)(2) を踏まえた実践（第 11 時）

「深い学び」の実現に向けて，単元後半に位置付けた第 11 時では，数学の事象から問題を見いだし，数学的な推論などによって問題を自立的，協働的に解決していき，その解決過程や得られた結果を振り返り，概念を形成したり体系化したりしながら，統合的・発展的に考察し表現できるようにします。

【第 11 時の学習過程】

学習過程	○生徒の学習活動 ・数学的な見方・考え方を働かせている生徒の姿	・数学的な見方・考え方を働かせる教師の働きかけ
① 問題を見いだす	○問題を見いだす活動 ・「世界で最も高い建物の頂部からボールを落とすとしたら，何秒後に到達するのか確かめてみたい」	・興味・関心を高めるために，世界で最も高い建物を題材に取り扱う。
	○問題の結果を予測する活動 ・「１m落下するのに 0.1 秒掛かるとしたら，828mを落下するのに 82.8 秒掛かるよね」	・問題の結果を予測する活動を設定する。
	○事象を数学化する活動 ・「表から二つの数量の変化の様子を調べたり，グラフや式に表したりしてみるとよいかな」	・問題を解決するために，必要な情報を整理する活動を設定する。
② 主に個別に考える	○問題を解決する方法を見通す活動 ・「表から二つの数量の変化の様子を調べてみよう」 ・「グラフや式を用いて考えてみよう」	・既習の学習内容や方法の適用を考え，問題を解決する方法を見通す活動を設定する。
	○自分の考えをまとめる活動 ・「表から二つの数量の変化の様子が分かったぞ」 ・「グラフは原点を通る滑らかな曲線になりそうだ」 ・「式は表にない距離でも計算して時間を求めることができそうだ」	・自分の考えを筋道立てて，表，式，グラフを基にして数学的に考察し表現する活動を設定する。
③ 主に協働的に考える	○自分の考えを他者に説明する活動 ・「私は，時間を x 秒，距離を y mとして，表とグラフを用いて考えました」	・自分の考えを，表，式，グラフを相互に関連付けながら数学的な表現を用いて，他者に根拠を示して説明する活動を設定する。
	○自分の考えと他者の考えを比較することで，他者の考えを理解する活動 ・「表は，二つの数量の変化の様子を調べやすそう」	・よりよい方法で問題を解決できるように，他者の考えに触れる活動を設定する。
	○求めた答えが適しているか吟味する活動 ・「グラフをかくことができれば，求めた 13 秒後という答えを確かめることができるよね」	・条件と結果の関係を捉えることができるように，求めた答えが問題に適しているか吟味し確かめる活動を設定する。
④ 振り返る	○自己評価をする活動 ・「表やグラフから関数 $y=ax^2$ とみなすことができれば，式を使って考えることができそうだ」	・分かったことやできたことを確認する活動を設定する。
	○新たな問題を発見する活動 ・「ボールをそっと落とすのか，投げ下ろすかで地面に到達する時間は変わるのかな」	・新たな問題を発見できるように，学習内容を振り返る活動を設定する。

「深い学び」の実現に向けて，第 11 時の中でも数学の事象から問題を見いだす場面と問題解決の過程を協働的に深める場面が特に重要であると考えます。そこで，次頁では「①　問題を見いだす過程」と「③　主に協働的に考える過程」に焦点を当てて，教師と生徒の対話の具体を示します。

「①　問題を見いだす過程」の実際

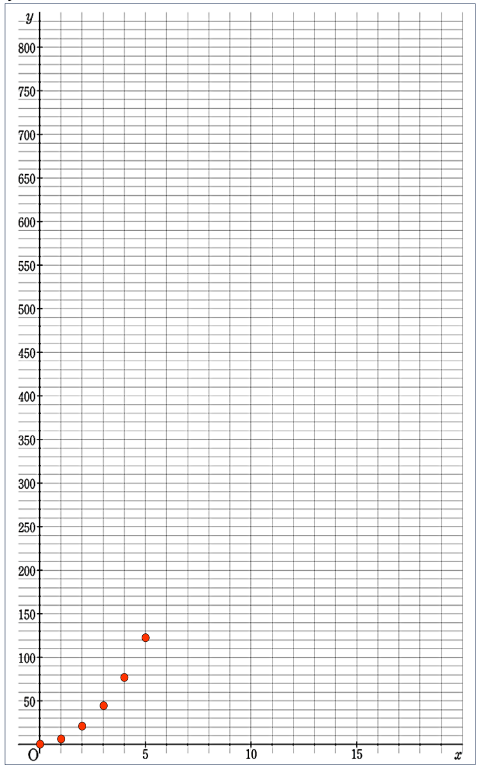
生徒が問題場面の状況を対話の中で整理し，事象を理想化したり単純化したりして数量関係に着目することで，数学的に解決可能な問題を見いだすことができるようにします。

<table>
<tr><th>教師の発問（Ｔ）と生徒の反応（Ｓ）</th><th>解説</th></tr>
<tr><td>Ｔ　私が持っているこのボールを１ｍの高さから床に落とします。
　　何秒後に床に到達するでしょうか？予想してみてください。
Ｓ　１秒後。
Ｓ　0.5 秒後。
Ｔ　ではやってみます。数えてください。
　　（持っているボールを床に落とす）
Ｔ　さて，何秒後でしたか？
Ｓ　１秒も掛かっていないよね。だから，0.5 秒後。
Ｓ　もっと速いんじゃないかな。だから，0.1 秒後。
Ｔ　正確には分かりませんが，とても短い時間だったことは確認できましたね。</td><td></td></tr>
<tr><td>　　では，もし，このボールを世界で最も高い建物*の頂部から落とすとしたら，何秒後に地面に到達するでしょうか？
Ｓ　世界で最も高い建物？確かめてみたい！
＊「ブルジュ・ハリファ（アラブ首長国連邦）」を想定しています。</td><td>・世界で最も高い建物を題材に取り扱ったことで，生徒は興味・関心を高めることができています。</td></tr>
</table>

<table>
<tr><th>教師の発問（Ｔ）と生徒の反応（Ｓ）</th><th>解説</th></tr>
<tr><td>Ｔ　この問題を解決するには，どのような情報が必要でしょうか？
Ｓ　その建物の高さを知りたいです。</td><td></td></tr>
<tr><td>Ｔ　世界で最も高い建物の高さは 828m です。
　　何秒後に地面に到達するか予測してみましょう。
Ｓ　仮に，ボールを１ｍの高さから落とすと 0.1 秒掛かるとしたら，２ｍの高さから落とすと 0.2 秒だよね？
Ｔ　１ｍで 0.1 秒なら，２ｍで 0.2 秒になると思ったのはどうしてですか？
Ｓ　高さが２倍になるなら時間も２倍になると思ったからです。
Ｓ　それなら，828m の高さから落とすと，0.1×828 を計算して 82.8 秒になるから，約１分 23 秒だよね。
Ｔ　さて，どうでしょうね。ほかにどのような情報が必要でしょうか？
Ｓ　ボールの落とし方はどうしますか？
Ｓ　そっと落とすのか，投げ下ろすのかでも結果が違うんじゃないかな。
Ｔ　どのように落とすかでも違うかもしれませんね。
　　今回はそっと落とすと仮定して考えてみましょう。
Ｔ　数学を使って解決するには，どのような情報が必要でしょうか？
Ｓ　ボールが落下し始めてからの時間と，ボールが落下した距離の関係を知りたいです。
Ｔ　どうして，その情報が必要なのですか？
Ｓ　時間と距離の関係を調べると，比例関係にあるか確かめることができそうだからです。
Ｔ　なるほど。よい視点ですね。
　　（時間と距離の関係を表した表を黒板に提示する）
　　ボールが落下し始めてから５秒後までの時間と距離の関係は，このようになるとします。
<table>
<tr><td>時間（秒）</td><td>0</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td></tr>
<tr><td>距離（ｍ）</td><td>0</td><td>4.9</td><td>19.6</td><td>44.1</td><td>78.4</td><td>122.5</td></tr>
</table></td><td>・問題の結果を予測させたり，生徒の予測に対して問い返しを行ったりしたことで，生徒は量の関係を意識することができています。</td></tr>
<tr><td>Ｔ　この表から，どのようにしたら問題を解決することができるでしょうか？
Ｓ　二つの数量の変化の様子を調べればよいと思います。
Ｓ　表を基に，グラフ用紙に点をとってみると何か分かるかもしれません。
Ｓ　表やグラフから，時間と距離の関係を表す式をつくれたらよいと思います。</td><td>・問題を解決するために必要な情報を整理したことで，生徒は二つの数量の変化の様子や関係に着目し，事象を数学化することができています。</td></tr>
</table>

「③　主に協働的に考える過程」の実際

生徒が表，式，グラフを相互に関連付けて，自分の考えと他者の考えを比較することで，よりよい方法で問題を解決できるようにします。

<table>
<tr><th>教師の発問（Ｔ）と生徒の反応（Ｓ）</th><th>解説</th></tr>
<tr><td>Ｔ　自分の考えの根拠を示して，みなさんに説明してみましょう。
Ｓ　私は，時間を x 秒，距離を y ｍとして，表とグラフを使って考えました。
　　表を基に点をとると，原点を通るなめらかな曲線になりそうだったので，関数 $y = ax^2$ とみなして考えることができると思いました。


【生徒のワークシート（グラフ）】
　　でも，$x > 5$ の点は分からなかったから，グラフをかくことができませんでした。
　　よって，$y = 828$ のときの x 座標を読み取ることができず，この問題を解決することができませんでした。
Ｓ　実際に正確なグラフをかくことができないと，距離が 828m のときの時間を読み取ることができないから，この方法では解決することができないね。
Ｔ　正確なグラフをかくことができないならば，距離が 828m のときの時間を求めることはできないのでしょうか？
　　ほかの方法はありませんか？
Ｓ　グラフの形から関数 $y = ax^2$ とみなせるから，式 $y = ax^2$ を使って考えることができるのではないかな。
Ｔ　すばらしい！
　　グラフの形状や特徴から関数 $y = ax^2$ とみなせそうなことに気付くことができています。</td><td>・自分の考えを他者に根拠を示して説明する活動を設定し，生徒の説明や発言に対して問い返したり価値付けたりしたことで，生徒は表，式，グラフを相互に関連付けて考察することが問題解決に有効だと気付くことができています。</td></tr>
</table>

教師の発問（T）と生徒の反応（S）	解説
T　式を用いた方法で考えた人はいますか？ 　（生徒のワークシートを電子黒板に提示する） S　私は，時間を x 秒，距離を y mとして，表と式を使って考えました。 　表を基に x と y の値の変化の様子を調べると，x の値を２倍，３倍，４倍，５倍すると，y の値は４倍，９倍，16 倍，25 倍になることが分かりました。	・他者の考えに触れることを促す発問を行ったり，ほかの解決方法と自分の考えを比較する活動を設定したりしたことで，生徒は数学的な表現を用いながら問題を解決するよりよい方法への理解を深めることができています。

			2倍	3倍	4倍	5倍
時間（秒）	0	1	2	3	4	5
距離（m）	0	4.9	19.6	44.1	78.4	122.5
			4倍	9倍	16倍	25倍

【生徒のワークシート（表）】

教師の発問（T）と生徒の反応（S）	解説
このことから，関数 $y=ax^2$ とみなして考えることができます。 　$y=ax^2$ に $x=1$，$y=4.9$ を代入すると，$4.9=a\times 1^2$ 　$a=4.9$ であるから，式は $y=4.9x^2$ となります。 　$y=4.9x^2$ に $y=828$ を代入すると，$828=4.9x^2$ 　$x^2=168.9\cdots$ 　$168.9\cdots$ を約 169 とみなして，$x^2=169$ 　$x^2=169$ を解くと，$x=\pm 13$ 　$x>0$ であるから，$x=13$ 　よって，828mの高さから落としたボールは，約 13 秒後に地面に到達すると思います。 S　なるほどね。 　表を使って考えると，二つの数量の変化の様子が調べやすいです。 S　式を使って計算することができれば，求めたい数量を求めることができるね。 T　表と式を関連付けることで，関数 $y=ax^2$ とみなして考えることができました。	

生徒が求めた答えを吟味する活動を通して，条件と結果の関係を捉えることができるようにします。

教師の発問（T）と生徒の反応（S）	解説
T　約 13 秒という答えが問題に適しているかどうかは，どのように確かめればよいでしょうか？ S　表を使うなら，x の値が 13 倍になるとき y の値は 169 倍になるはずです。 S　式を使うなら，$y=4.9x^2$ に $x=13$ を代入すればよいと思います。 T　グラフを用いるなら，どうなるでしょうか？ S　$y=4.9x^2$ のグラフをかくことができれば，$x=13$ のときの y の値をみればよいと思います。 T　それでは，１人１台端末を使って $y=4.9x^2$ のグラフをかいてみましょう。 S　１人１台端末を使って $y=4.9x^2$ のグラフをかいてみました。 　かいたグラフを見てみると，$x=13$ のときの y の値は約 828 となりそうです。 S　ということは，約 828mとみなすことができるね。 　つまり，約 13 秒後という答えは問題に適しています。 T　授業の始めに立てた予測と比べるとどうでしたか？ S　予測の１分 23 秒より，１分 10 秒も早かったです。 　かいたグラフから変化の割合を読み取ると，ボールの落ちる速さがだんだんと増していくことが分かりました。 T　グラフから変化の割合が一定にならないことに気付くことができましたね。	・求めた答えが問題に適しているかどうかを，どのように吟味し確かめるかを発問したことで，生徒は条件と結果の関係を捉えることができています。

単元を通して，**数学的活動**の一層の充実を図るために，算数・数学における問題発見・解決の過程を学習過程に反映し，生徒が**数学的な見方・考え方**を自ら働かせることができるような働きかけを行うことで，「深い学び」の実現を目指していきましょう。