３　授業実践

実践事例７　数学Ｂ

指導計画

○単元名

「第２章　空間のベクトル」（高等学校 数学Ｂ　数研出版）

○単元の目標

ベクトルについて理解させ、基礎的な知識の習得と技能の習熟を図り、事象を数学的に考察し表現する能力を伸ばすとともに、それらを活用する態度を育てる。

○単元について

座標及びベクトルの考えを平面から空間に拡張する単元である。座標、２点間の距離、ベクトルの大きさ・成分・内積の計算は、平面ベクトルで学んだ内容を拡張すればよいので生徒は比較的理解しやすい。位置ベクトルの考え方を利用して図形の性質を調べる内容については、平面ベクトルでの内容と同じように考えて立式して処理することができる。しかし、空間の図形をイメージすることや一直線上にない３点が定める平面上の点が満たす関係式の立式に難しさを感じやすい。与えられた２点を直径の両端とする球面の方程式を求める問題や空間内の折れ線の長さの和の最小値を求める問題は、これまでに学習した様々な考え方を活用する方法が考えられるので、数学的な思考力・判断力・表現力を身に付けさせるのに適している。

指導に当たっては、まずは教科書の基本的概念をしっかり定着させたい。その上で、基本的な図形の性質や関係についてベクトルを用いて表現することを学ばせ、様々な事象を考察する力を育てていきたい。問題によっては解法が１通りではないものがあり、いろいろな解法を考えさせることにより多角的に物事を見ていくような意識を持たせていきたい。そのために、問題を個人で考えさせた後、対話的活動を通して、生徒自身が考えを発表し、練り合う場面を設定したい。

○単元における工夫（思考力・判断力・表現力の育成を目指して）

・球の方程式を求める様々な方法を授業で取り扱う。まず、円の性質を思い出させ、それを応用して球の性質を考えさせて立式につなげる。

・空間内で点を平面に関して対称移動させたり、点と直線上の点との最短距離を求めさせたりする問題を扱う。

・リフレクション・シートを配付し、毎授業の最後に学習内容を振り返らせる。

○本時の目標

・事象を数学的に考察することを通して、空間のベクトルにおける数学的な見方や考え方を身に付ける。　【数学的な見方や考え方】

○本時における工夫（思考力・判断力・表現力の育成を目指して）

手立てⅠ

・図を比較させることでどのような図を描けばイメージしやすいか考えさせる。

・比較した後、再度図を描かせ、なぜその図がよいのかを記述させる。

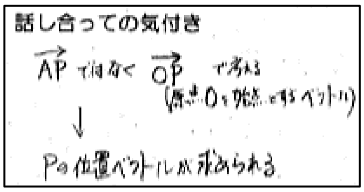
手立てⅡ

・平面の問題を想起させ、その考えを関連付けて考えさせる。

・点Ｐ、Ｑのどちらを対称移動させた方が問題解決しやすいのか、その理由を考えさせる。

授業の様子　８／10 時間目

…対話的活動　…評価（A…十分達成　B…おおむね達成　★…達成不十分な生徒への支援）

過程	学習活動 …教師と生徒、生徒同士のやり取り	教師の働き掛け（○）、評価規準（◆）
導入	1　空間座標の問題について復習する。 **復習問題１**　次の２点間の距離 AB と CD ではどちらが長いか。 A (0, 0, 0), B (3, −4, 2)　　C (4, −1, 3), D (−2, 2, 5) **復習問題２**　２点 A (4, 0, 5), B (0, 2, 1) を通る直線上に点 P があるとき，点 P の座標はどのように書き表すことができるか。	
	・個人で考えた後、ペア活動により考えを比較する。  ペアで解法を確認している様子	○まず個人で考えさせた後、ペアで互いの考えや解き方を説明し合い、納得がいったら着席させた。その際、答えのみの確認ではなく、考えた根拠を伝えるように指示した。ペアで解決できなければ、自由に歩いて聞きに行かせた。
	 ワークシートに書かれたメモ	○新しい知識を得たら、プリントの下の方のメモ欄に記入させた。 ○なかなか着席できない生徒がいたので、全体で解法を確認した。
	・３点が一直線上にあることを、ベクトルを用いて表す。	○ペアで立式の仕方を検討させた。
	・$\overrightarrow{AP}=k\overrightarrow{AB}$の始点を原点に変えることで、点Ｐの座標をkを用いて表す。	○点Ｐの座標を求めるにはベクトルの始点をどの点にすればよいかを、ペアで確認させた。

展開

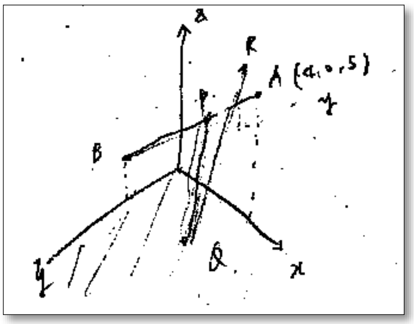
2　演習問題を解く。

演習問題

2 点 A (4, 0, 5), B (0, 2, 1) を通る直線上に動点 P があり, xy 平面上に動点 Q がある。点 R (0 , −4 , 2) に対し, 距離の和 PQ＋QR の最小値を求めよ。

◆事象を数学的に考察することを通して、空間のベクトルにおける数学的な見方や考え方を身に付けている。
【数学的な見方や考え方】
（ワークシート）
Ａ：xy平面に対して点Ｒと対称な点Ｒ’を取り、ＱとＲの距離をＱとＲ’の距離として処理する考え方を身に付けている。加えて、３点Ｐ、Ｑ、Ｒ’が同一直線上にある場合を考え、ＰＲ’の長さの最小値を求める問題として処理する考え方を身に付けている。
Ｂ：xy平面に対して点Ｒと対称な点Ｒ’をとり、ＱとＲの距離をＱとＲ’の距離として処理する考え方を身に付けている。
★：平面での同じような問題の解き方を想起させる。

(1)　図を描き解決の見通しを立てる。



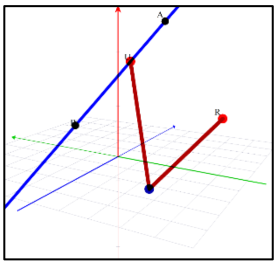
ある生徒が描いた図

あるグループの話合いの内容
生徒Ａ：片方を裏側に持ってくればいい。
生徒Ｂ：xy平面だから$z=0$。
生徒Ａ：そうそう、だからz座標をマイナスにすればいい。

○グループを作らせ、それぞれが描いた図を比較しながら考えさせた。

ワークシートに描いた図を用いて議論する様子

○電子黒板を用いてグラフを提示し、解決に向けての見通しを立てられないグループ内でも議論できるように配慮した。



電子黒板に提示したグラフ

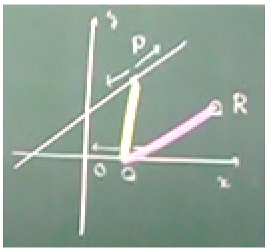
教　師：平面上の問題として考えてみよう。点Ｐはある直線上を動き、点Ｑはx軸上を動くとする。ＰＱ＋ＱＲを最小にするにはどのようなに考えればよいか？

生徒Ｃ：∠ＰＱＲが 90 度になればよい。

生徒Ｄ：点Ｐをx軸に関して対称になるように移動させればよい。

教　師：もし点Ｐがx軸上にあったらどうする。

○点Ｒをxy平面に関して対称移動させればよいことに気付くように、平面での同じような問題の解き方を想起させた。



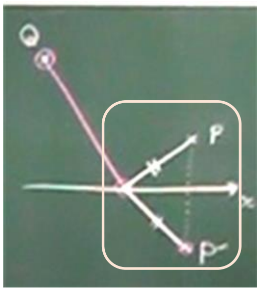
教師の板書１

・平面での問題で、動点が１つの場合を考えることで解決策の理解を深める。

教　師：○○の家がＱで、□□の家がＰ、x軸のところに花畑が続いているとしよう。Ｑから出発してx軸のところで花を摘んでＰまで行くのに、移動距離をなるべく短くするにはどうすればいいだろう。

生徒Ｅ：Ｐをx軸に関して対称移動させＰ’とし、Ｐ’とＱが一直線になればよい。

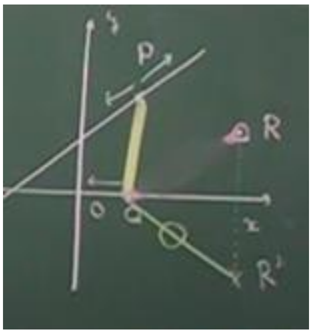
○平面上で２点Ｐ、Ｑを固定し、x軸上に動点をとり、動点からＰ、Ｑまでの距離の和が最小になるときを考えさせた。



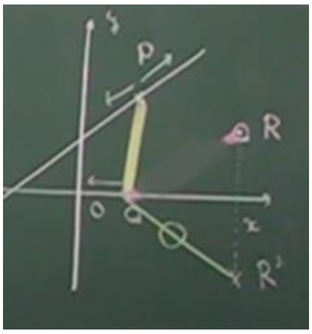
教師の板書２

○対称点を取ると２つの線分の長さが等しくなることを理解させた。

教　師：この辺りに座っている人がもう気付いたようです。さっきの図に戻ると、点Ｑがどこにあれば、ＰＱ＋ＱＲ’を最小にできますか。グループで確認してください。



教師の板書３

	・３点Ｐ，Ｑ，Ｒ’が一直線上にあるときを考えればよいことを確認する。	○点Ｐを固定した場合は、３点Ｐ、Ｑ、Ｒ’が一直線になるときにＰＱ＋ＱＲ’が最小になることを理解できているか、指名して答えさせることで確認した。  教師の板書４
	・点Ｐを動かし、ＰＲ’が最小となるのはどのようなときかを考察する。	○次に点Ｐを動かして考察させた。直線ＡＢ上の点Ｐと点Ｒ’に対し、ＰＲ’⊥ＡＢのときにＰＲ’最小となることを、直線ＡＢと点Ｒ’を含む平面を図示して考えさせた。
	(2)　最小値を求める計算方法について見通しを立て、計算する。	○垂直を利用して立式できないか、２点間の距離の公式を利用できないか、ヒントを与えながら見通しを立てさせた。
まとめ	３　リフレクション・シートに記入しながら解決に至るポイントを振り返る。	○点Ｒをxy平面に関して対称移動させた点Ｒ’を取ること、３点Ｐ、Ｑ、Ｒ’が一直線上になることを考えること、ＰＲ’⊥ＡＢとなることを振り返らせた。

授業実践の考察（実践事例７　数学Ｂ）

視点１　１時間における生徒の変容

生徒が自分の考えを広げたり、深めたり、確かなものにすることができたのか、事前の調査問題と本時のワークシートの記述内容を比較することで手立ての有用性を検証しました。結果を**表１**に示しています。判定基準は、次のとおりです。Ｎはデータが得られなかった生徒の人数を、ｎは総数を表しています。

表１　事前から本時に架けての変容

判定基準

事前　Ａ：直線ＡＢに対して点Ｐと対称な点Ｐ’を取る考え方を身に付けている。加えて、３点Ｏ，Ｐ’，Ｑが一直線になる場合として処理する考え方を身に付けている。

　　　Ｂ：直線ＡＢに対して点Ｐと対称な点Ｐ’を取る考え方を身に付けている。

本時　Ａ：xy平面に対して点Ｒと対称な点Ｒ’を取り、ＱとＲの距離をＱとＲ’の距離として処理する考え方を身に付けている。加えて、３点Ｐ、Ｑ、Ｒ’が同一直線上にある場合を考え、ＰＲ’の長さの最小値を求める問題として処理する考え方を身に付けている。

　　　Ｂ：xy平面に対して点Ｒと対称な点Ｒ’を取り、ＱとＲの距離をＱとＲ’の距離として処理する考え方を身に付けている。

本時　n=40

事前＼本時	A	B	C	N
A	5	0	**6**	2
B	0	0	0	0
C	**5**	2	**14**	5
N	1	0	0	0

事前のＣ段階から本時のＡ段階へ移行した生徒が５人いました。この５人については自分の考えを広げることができています。一方で、事前のＡ段階から本時のＣ段階へ移行した生徒が６人いて、平面の問題と同じように考察できていません。空間でも平面と同じように処理できると、自分の考えを深めることができなかったと考えられます。また、事前と本時のどちらもＣ段階であった生徒が 14 人おり、自分の考えを広げることができなかったと考えられます。次に各班の状況を考察しました。

表２　各班の事前から本時に架けての変容

A 班　本時　n=4

		A	B	C	N
事前	A	0	0	1	0
	B	0	0	0	0
	C	0	0	2	1
	N	0	0	0	0

B 班　本時　n=4

		A	B	C	N
事前	A	0	0	0	0
	B	0	0	0	0
	C	0	0	4	0
	N	0	0	0	0

C 班　本時　n=4

		A	B	C	N
事前	A	0	0	0	0
	B	0	0	0	0
	C	0	0	4	0
	N	0	0	0	0

D 班　本時　n=6

		A	B	C	N
事前	A	1	0	2	1
	B	0	0	0	0
	C	0	0	2	0
	N	0	0	0	0

E 班　本時　n=6

		A	B	C	N
事前	A	1	0	0	1
	B	0	0	0	0
	C	0	2	1	1
	N	0	0	0	0

F 班　本時　n=4

		A	B	C	N
事前	A	2	0	0	0
	B	0	0	0	0
	C	0	0	0	1
	N	1	0	0	0

G 班　本時　n=4

		A	B	C	N
事前	A	0	0	1	0
	B	0	0	0	0
	C	3	0	0	0
	N	0	0	0	0

H 班　本時　n=4

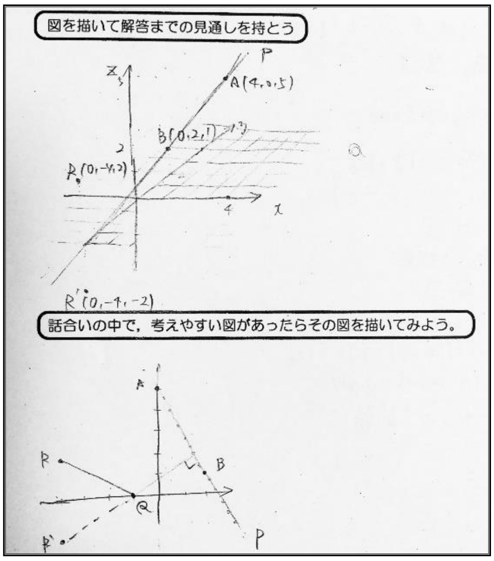
		A	B	C	N
事前	A	0	0	1	0
	B	0	0	0	0
	C	2	0	0	1
	N	0	0	0	0

I 班　本時　n=4

		A	B	C	N
事前	A	1	0	1	0
	B	0	0	0	0
	C	0	0	1	1
	N	0	0	0	0

Ａ～Ｃ班は対称点を取る考えが広がっていません。前提となる平面の問いでの知識がなかったことが一つの原因だと考えられます。また、ワークシートからは空間での状況把握ができていないと見られ、対話的活動が円滑に進まなかったと考えられます。Ｄ班は、本時においてＡの評価を得ている生徒が１名います。その生徒は班の中で活発に意見を述べていましたが、その生徒の考えが班の中に広がったとはワークシートからは判断できませんでした。話合いで得た考えを確かなものにできるよう、ワークシートに話し合った後の考えを書くように促す必要性を感じます。Ｅ班も本時においてＡの評価を得ている生徒が１名いました。この生徒が、３点Ｐ、Ｒ、Ｑ’が一直線上にあることが分かるように図を描けていれば、班の中で他の生徒の思考力を育成できたのではないかと考えられます。Ｆ～Ｈ班のワークシートからは、班での話合いや教師のヒントを基に図を修正しながら問いの状況を把握した様子がうかがえ、考えを深めることができたとみられます。Ｉ班では各自がそれぞれの方法で計算を行っていた跡があり、話合いで意見をまとめるよりも、それぞれの考えに基づいての計算を優先して行ったのではないかと考えられます。

本クラスの通常の授業では、対話的活動を行うときは席を立って話合いを行ってもよいことになっています。しかし、本時では授業参観者が多かったためか生徒は席を離れようとせず、生徒の考えがクラス全体に広がりにくい状況でした。**資料１**のように試行錯誤しながら分かりやすい図を描いている生徒がいたので、その図を電子黒板で紹介して考え方を共有させて思考力の育成につなげることができていれば、手立てⅠは有効なものになったのではないかと考えられます。



資料１　試行錯誤しながら図を修正した例

班によっては対称な点を取る考えがなかなか出てこなかったため、手立てⅡを取り入れることで議論の活性化を図りました。教師に指名された生徒は点Ｐをx軸に関して対称に移動させると答えました。しかし、直線ＡＢも対称に移動させないと点Ｐを動かすことができません。それを回避するには点Ｒを対称移動させる方法が考えられます。対称移動させるのは点Ｐと点Ｒのどちらがよいのか、生徒と教師がやり取りをしながら考えを深めさせていくことができれば、手立てⅡはより有効なものになっていたのではないかと考えます。

視点２　単元における生徒の変容

(1) 評価問題の事前・事後及び本時のワークシートの記述の分析

事前の評価問題と同じ問題（事後１と表記しています）及び本時の内容と同じ問題（事後２と表記しています）を単元終了後に解かせました。結果を**表３、４**に示しました。

表３　事前から事後に架けての変容

判定基準（事前・事後１共通）

Ａ：直線ＡＢに対して点Ｐと対称な点Ｐ’を取る考え方を身に付けている。加えて、３点Ｏ，Ｐ’，Ｑが一直線になる場合として処理する考え方を身に付けている。

Ｂ：直線ＡＢに対して点Ｐと対称な点Ｐ’を取る考え方を身に付けている。

事後１　n=40

事前＼事後１	A	B	C	N
A	13	0	0	0
B	0	0	0	0
C	13	1	11	1
N	1	0	0	0

表４　本時から事後に架けての変容

判定基準（本時・事後２共通）

Ａ：xy平面に対して点Ｒと対称な点Ｒ’をとり、ＱとＲの距離をＱとＲ’の距離として処理する考え方を身に付けている。加えて、３点Ｐ、Ｑ、Ｒ’が同一直線上にある場合を考え、ＰＲ’の長さの最小値を求める問題として処理する考え方を身に付けている。

Ｂ：xy平面に対して点Ｒと対称な点Ｒ’をとり、ＱとＲの距離をＱとＲ’の距離として処理する考え方を身に付けている。

事後２　n=40

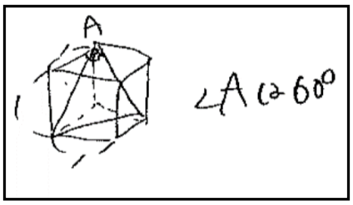
本時＼事後２	A	B	C	N
A	4	1	4	2
B	0	0	2	0
C	5	1	14	0
N	3	1	3	0

前頁表３からは事前のＣ段階からＡ、Ｂ段階に移った 14 人については考えの広がりが認められました。しかし、11 名はＣ段階にとどまっており、ペアで説明し合うことで全員に理解させるといった改善策が必要であったと考えられます。ここでの改善がなされれば、**前頁表４**のＣ段階にとどまり続けている 14 人についても改善が図られたのではないかと考えます。本時のＣ段階から事後２のＡ段階に移った５人は、変容の理由として「対話的活動の後、先生の説明を聞くことで理解できた」と回答しています。対話的活動の様子をよく観察し、必要に応じて教師が主導しながら学習内容を確認していくことが大切です。

(2)　リフレクション・シートの分析

空間ベクトルの単元では、毎授業の最後にリフレクション・シートを用いて学習内容を振り返る活動を行いました。記述内容が学習内容の名称だけだったり、計算力の必要性を書いただけだったりしている生徒が多かったため、授業を受けて考えを広げたり、深めたり、確かなものにすることができたかどうかは判断しづらいものが多くありました。しかし、改善につながる次のような２つの記述がありました。

１つ目の記述は、生徒が授業で一番大切と思ったこととして描いた**資料２**です。この生徒は、結果として得られた「∠Aは 60°」を記述しています。根拠を記述させるように促すとより考えを深めさせたり確かなものにしたりすることができたのではないかと考えます。



資料２　生徒の記述

２つ目の記述は、「１つのベクトルの終点を①平面上の点として②ある直線上の点として考えること」です。平面と直線の交点を終点とする位置ベクトルの求め方の要点を端的にまとめています。ポイントとなる数学的な考え方を書くことで自分の考えを確かなものにできているのではないかと思います。書き方の例として「○○をするときは、○○を使う」と記述しておけば、他の生徒にとってもより有意義な活動にすることができたと考えます。

(3)　学習に関するアンケートの分析

対話的活動を取り入れたことでの生徒の意識の変容を見るために、学習に関するアンケートを実施しました。事前、事後の２回のアンケートの結果については**次頁図１～３**に示しています。**図１**からは、質問３、６、10に、**図２**からは質問６に比較的大きな数値の伸びが見られます。「授業中には理由や根拠を基に意見を発言したり、記述したりするように」（**図１**質問３　事前2.70%、事後3.02%）生徒の意識の変容がうかがえます。また、「授業中の学習内容を、既に学んだ内容と関連付けて考える」（**図１**質問６　事前2.95%、事後3.33%）、「日頃から、自分の考えと他者(先生や友達，書籍等)の考えを比較して、より良い考えにする」（**図２**質問６　事前2.90%、事後3.256%）ようにも意識が変容しています。よって、対話的活動を続けていくことは、思考力・判断力・表現力の育成につながると考えられます。対話的活動には、**図１**質問10（事前3.30%、事後3.62%）の結果に見られるように好感を持っている生徒が多くいます。対話的活動に対する意見として、「ペア・グループで（学習）することで新しい考えに至ることができる」、「自分の出した案と友人のものとを合体させて解答にたどり着いたから嬉しい」、「頭の中でぐるぐる考えるよりも、口に出してみた方が頭の中も整理できるし、公式も覚えられる」などの意見がありました。その一方で、「数学が苦手な人がグループになったときにはあまり意味がないと思う」と述べている生徒もいました。そのため、自由に立ち歩いての意見交

換を促したり、生徒に発表させて考えをクラス全体で共有したり、教師が説明したことを生徒同士で再度説明させるなどの配慮や工夫が必要であると考えています。

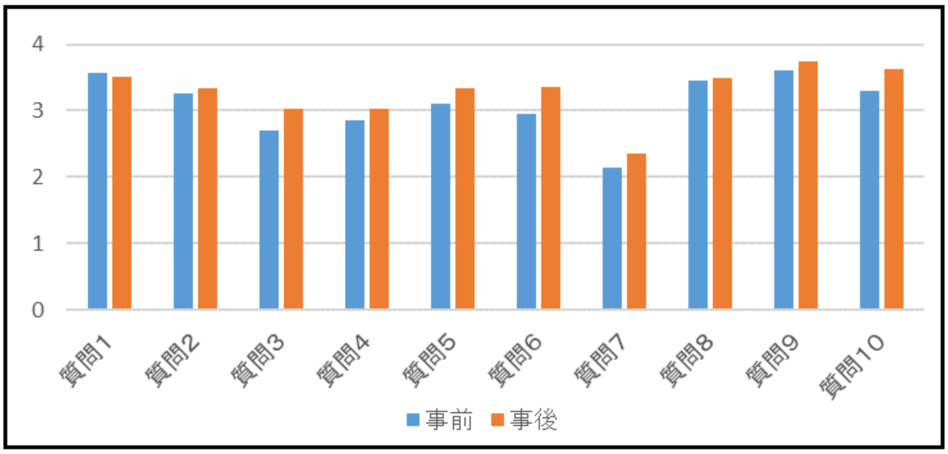


図1　学習に関するアンケート（授業中の学習活動）に関する事前と事後の変化（平均値）

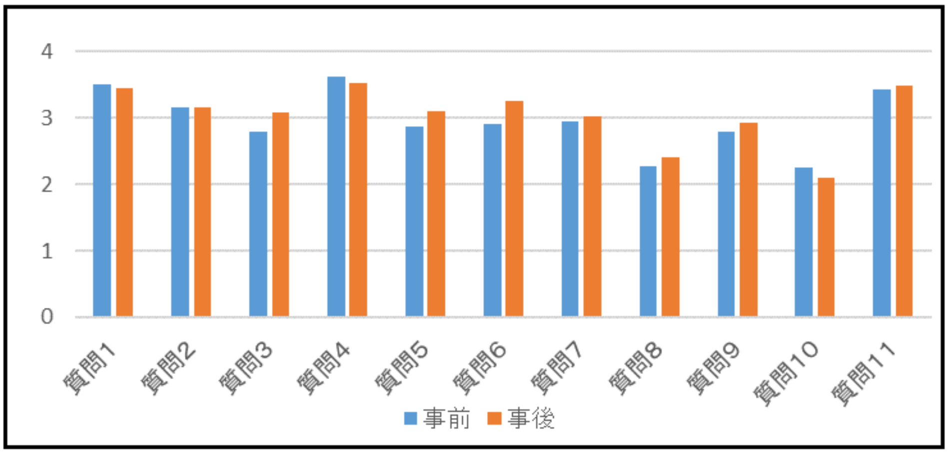


図2　学習に関するアンケート（授業以外の学習活動）に関する事前と事後の変化（平均値）

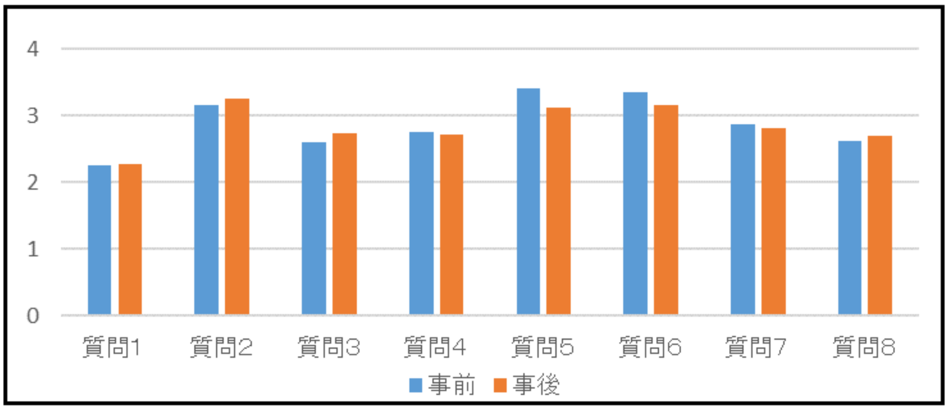


図3　学習に関するアンケート（授業以外の学習活動）に関する事前と事後の変化（平均値）