

3 授業実践

実践事例 7 数学 B

指導計画

○単元名

「第 2 章 空間のベクトル」(高等学校 数学 B 数研出版)

○単元の目標

ベクトルについて理解させ、基礎的な知識の習得と技能の習熟を図り、事象を数学的に考察し表現する能力を伸ばすとともに、それらを活用する態度を育てる。

○単元について

座標及びベクトルの考えを平面から空間に拡張する単元である。座標、2点間の距離、ベクトルの大きさ・成分・内積の計算は、平面ベクトルで学んだ内容を拡張すればよいので生徒は比較的理解しやすい。位置ベクトルの考え方を利用して図形の性質を調べる内容については、平面ベクトルでの内容と同じように考えて立式して処理することができる。しかし、空間の図形をイメージすることや一直線上にない3点が定める平面上の点が満たす関係式の立式に難しさを感じやすい。与えられた2点を直径の両端とする球面の方程式を求める問題や空間内の折れ線の長さの和の最小値を求める問題は、これまでに学習した様々な考え方を活用する方法が考えられるので、数学的な思考力・判断力・表現力を身に付けさせるのに適している。

指導に当たっては、まずは教科書の基本的概念をしっかり定着させたい。その上で、基本的な図形の性質や関係についてベクトルを用いて表現することを学ばせ、様々な事象を考察する力を育てていきたい。問題によっては解法が1通りではないものがあり、いろいろな解法を考えさせることにより多角的に物事を見ていくような意識を持たせていきたい。そのために、問題を個人で考えさせた後、対話的活動を通して、生徒自身が考えを発表し、練り合う場面を設定したい。

○単元における工夫(思考力・判断力・表現力の育成を目指して)

- ・球の方程式を求める様々な方法を授業で取り扱う。まず、円の性質を思い出させ、それを応用して球の性質を考えさせて立式につなげる。
- ・空間内で点を平面に関して対称移動させたり、点と直線上の点との最短距離を求めさせたりする問題を扱う。
- ・リフレクション・シートを配付し、毎授業の最後に学習内容を振り返らせる。

○本時の目標

- ・事象を数学的に考察することを通して、空間のベクトルにおける数学的な見方や考え方を身に付ける。 【数学的な見方や考え方】

○本時における工夫(思考力・判断力・表現力の育成を目指して)

手立て I

- ・図を比較させることでどのような図を描けばイメージしやすいか考えさせる。
- ・比較した後、再度図を描かせ、なぜその図がよいのかを記述させる。


手立て II

- ・平面の問題を想起させ、その考えを関連付けて考えさせる。
- ・点 P、Q のどちらを対称移動させた方が問題解決しやすいのか、その理由を考えさせる。

授業の様子

8 / 10 時間目

…対話的活動 …評価 (A…十分達成 B…おおむね達成 ★…達成不十分な生徒への支援)

過程	学習活動 □…教師と生徒、生徒同士のやり取り	教師の働き掛け (○)、評価規準 (◆)
導入	<p>1 空間座標の問題について復習する。</p> <div data-bbox="301 412 1267 586" style="border: 1px solid black; padding: 5px;"> <p>復習問題1 次の2点間の距離 AB と CD ではどちらが長いかな。 $A(0, 0, 0), B(3, -4, 2) \quad C(4, -1, 3), D(-2, 2, 5)$</p> <p>復習問題2 2点 $A(4, 0, 5), B(0, 2, 1)$ を通る直線上に点 P があるとき、点 P の座標はどのように書き表すことができるか。</p> </div> <p>・個人で考えた後、ペア活動により考えを比較する。</p> <div data-bbox="258 804 697 999" style="text-align: center;">  </div> <p>ペアで解法を確認している様子</p> <div data-bbox="279 1122 639 1305" style="border: 1px solid black; padding: 5px; margin: 10px 0;"> <p>話し合っでの気付き</p> <p>\vec{AP} とは \vec{OP} と考える <small>(原点 O の位置を気にする)</small></p> <p>↓</p> <p>P の位置ベクトルが求まる。</p> </div> <p>ワークシートに書かれたメモ</p> <p>・3点が一一直線上にあることを、ベクトルを用いて表す。</p> <p>・$\vec{AP} = k\vec{AB}$ の始点を原点に変えることで、点 P の座標を k を用いて表す。</p>	<p>○まず個人で考えさせた後、ペアで互いの考えや解き方を説明し合い、納得がいったら着席させた。その際、答えのみの確認ではなく、考えた根拠を伝えるように指示した。ペアで解決できなければ、自由に歩いて聞きに行かせた。</p> <p>○新しい知識を得たら、プリントの下の方のメモ欄に記入させた。</p> <p>○なかなか着席できない生徒がいたので、全体で解法を確認した。</p> <p>○ペアで立式の仕方を検討させた。</p> <p>○点 P の座標を求めるにはベクトルの始点をどの点にすればよいかを、ペアで確認させた。</p>

展開

2 演習問題を解く。

演習問題

2点 $A(4, 0, 5)$, $B(0, 2, 1)$ を通る直線上に動点 P があり, xy 平面上に動点 Q がある。点 $R(0, -4, 2)$ に対し, 距離の和 $PQ + QR$ の最小値を求めよ。

◆事象を数学的に考察することを通して、空間のベクトルにおける数学的な見方や考え方を身に付けている。

【数学的な見方や考え方】

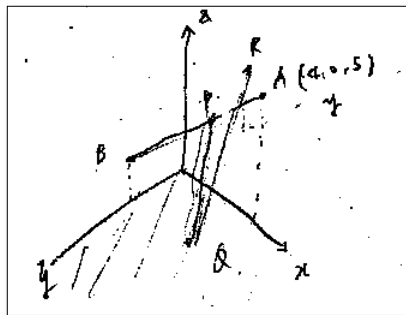
(ワークシート)

A : xy 平面に対して点 R と対称な点 R' を取り、 Q と R の距離を Q と R' の距離として処理する考え方を身に付けている。加えて、3点 P 、 Q 、 R' が同一直線上にある場合を考え、 PR' の長さの最小値を求める問題として処理する考え方を身に付けている。

B : xy 平面に対して点 R と対称な点 R' をとり、 Q と R の距離を Q と R' の距離として処理する考え方を身に付けている。

★ : 平面での同じような問題の解き方を想起させる。

(1) 図を描き解決の見通しを立てる。



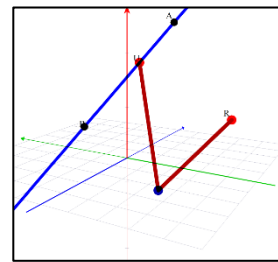
ある生徒が描いた図

○グループを作らせ、それぞれが描いた図を比較しながら考えさせた。



ワークシートに描いた図を用いて議論する様子

○電子黒板を用いてグラフを提示し、解決に向けての見通しを立てられないグループ内でも議論できるように配慮した。



電子黒板に提示したグラフ

あるグループの話合いの内容

生徒 A : 片方を裏側に持ってくればいい。

生徒 B : xy 平面だから $z = 0$ 。

生徒 A : そうそう、だから z 座標をマイナスにすればいい。

教師：平面上の問題として考えてみよう。点Pはある直線上を動き、点Qはx軸上を動くとする。PQ+QRを最小にするにはどのような考えればよいか？

生徒C：∠PQRが90度になればよい。

生徒D：点Pをx軸に関して対称になるように移動させればよい。

教師：もし点Pがx軸にあったらどうする。

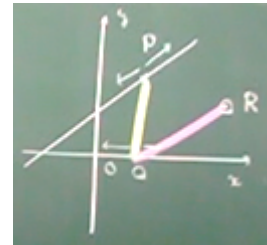
・平面での問題で、動点が1つの場合を考えることで解決策の理解を深める。

教師：○○の家がQで、□□の家がP、x軸のところに花畑が続いているとしよう。Qから出発してx軸のところで花を摘んでPまで行くのに、移動距離をなるべく短くするにはどうすればいいだろう。

生徒E：Pをx軸に関して対称移動させP'とし、P'とQが一直線になればよい。

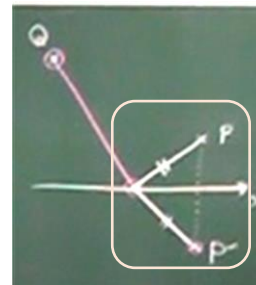
教師：この辺りに座っている人がもう気付いたようです。さっきの図に戻ると、点Qがどこにあれば、PQ+QR'を最小にできますか。グループで確認してください。

○点Rをxy平面に関して対称移動させればよいことに気付くように、平面での同じような問題の解き方を想起させた。



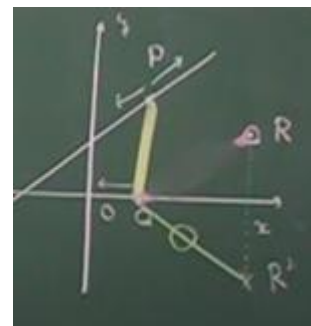
教師の板書 1

○平面上で2点P、Qを固定し、x軸上に動点を取り、動点からP、Qまでの距離の和が最小になるときを考えさせた。

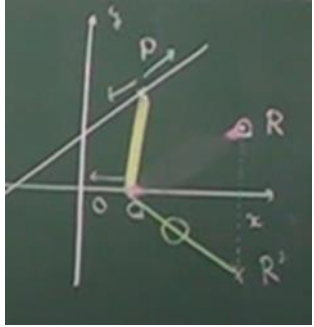


教師の板書 2

○対称点を取ると2つの線分の長さが等しくなることを理解させた。



教師の板書 3

	<p>・ 3 点 P, Q, R' が一直線上にあるときを考えればよいことを確認する。</p> <p>・ 点 P を動かし、PR' が最小となるのはどのようなときかを考察する。</p>	<p>○ 点 P を固定した場合は、3 点 P, Q, R' が一直線になるときに $PQ + QR'$ が最小になることを理解できているか、指名して答えさせることで確認した。</p>  <p style="text-align: center;">教師の板書 4</p> <p>○ 次に点 P を動かして考察させた。直線 AB 上の点 P と点 R' に対し、$PR' \perp AB$ のときに PR' が最小となることを、直線 AB と点 R' を含む平面を図示して考えさせた。</p>
	<p>(2) 最小値を求める計算方法について見通しを立て、計算する。</p>	<p>○ 垂直を利用して立式できないか、2 点間の距離の公式を利用できないか、ヒントを与えながら見通しを立てさせた。</p>
<p>まとめ</p>	<p>3 リフレクション・シートに記入しながら解決に至るポイントを振り返る。</p>	<p>○ 点 R を xy 平面に関して対称移動させた点 R' を取ることで、3 点 P, Q, R' が一直線上になることを考えること、$PR' \perp AB$ となることを振り返らせた。</p>