

3 授業実践

実践事例 2 数学 A

指導計画

○単元名

「第 1 章 場合の数と確率 第 1 節 場合の数」(数学 A 数研出版)

○単元の目標

集合の要素の個数、数え上げの原則、順列、組合せについて理解し、基礎的な知識を習得するとともに技能に習熟し、具体的な場合の数を数学的に考察する能力を養い、数学のよさを認識しそれらを活用する。

○単元について

ベン図や樹形図を用いたり、和の法則や積の法則を用いたりすることで、もれなく重複なく数え上げる方法について学習する。数え上げの原則、和の法則、積の法則、順列、組合せの一つ一つは理解しやすい。しかし、様々な場合の数を求めるには、場合に応じて数学的な見方や考え方を働かせる必要があり、そこに生徒は難しさを感じやすい。そこで、どのように考えて答えを導いたのか、過程を記述するように指導を行う。自分の考えを書いて、それを基に話し合いをする活動を取り入れることで、思考力、判断力を高め、自分の考えを表現できる力を養う。また、身近な事象を扱うことで数学の実用性を認識させる。

○単元における工夫(思考力・判断力・表現力の育成を目指して)

- ・自分の考えを書いて、それを基に話し合いを行うことで、概念形成を行わせる。
- ・思考力を必要とする問題を積極的に授業で取り扱う。
- ・生徒に板書をさせて、表現力を養うような機会を設ける。

○本時の目標

完全順列の総数をもつ規則性について、5 個の場合を基にして、場合分けをしながら、考察することができる。

○本時における工夫(思考力・判断力・表現力の育成を目指して)

- ・個人で考え自分の考えを持たせる。その後グループで話し合わせ、自分の考えを述べたり、疑問に思うことを尋ねたりすることができるようにする(手立てⅠ)。
- ・生徒が自分たちで完全順列の規則性を考察できるように、段階を迫って思考できるような発問を行う(手立てⅡ)。
- ・1 人の生徒が発表した考えを全員が理解できるように、グループで話し合う時間を設ける(手立てⅢ)。
- ・得られた関係式が、別の同じような事例でも成り立つかどうか考察させる(手立てⅣ)。
- ・課題の解決に向けて、学習した内容をどのように生かせばよいか考察させる(手立てⅤ)。

授業の様子

16/16 時間目 (…評価 : B…「おおむね満足できる」状況
A…「十分満足できる」状況)

過程	学習活動 <input type="checkbox"/> …教師と生徒のやり取り	教師の働き掛け (○)、評価規準 (◆) アクティブ・ラーニングの手法 (※)												
導入	<ul style="list-style-type: none"> ・ p_{41} の値を予想する。 <div data-bbox="276 421 1337 633" style="border: 1px solid black; padding: 5px;"> <p>問題 41 人のクラスで席替えを行うとき、少なくとも 1 人が同じ席になる確率を予想してみよう。</p> <table style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="border: 1px solid black; padding: 2px;">1</td> <td style="padding: 2px;">30%未満</td> <td style="border: 1px solid black; padding: 2px;">2</td> <td style="padding: 2px;">30%以上～40%未満</td> <td style="border: 1px solid black; padding: 2px;">3</td> <td style="padding: 2px;">40%以上～50%未満</td> </tr> <tr> <td style="border: 1px solid black; padding: 2px;">4</td> <td style="padding: 2px;">50%以上～60%未満</td> <td style="border: 1px solid black; padding: 2px;">5</td> <td style="padding: 2px;">60%以上～70%未満</td> <td style="border: 1px solid black; padding: 2px;">6</td> <td style="padding: 2px;">70%以上</td> </tr> </table> </div> <ul style="list-style-type: none"> ・ 予想したことを、学習用 PC を用い、解答する。 ・ 前時の課題の p_5、$1 - p_5$ について答え合わせをする。 ・ 本時の目標の確認をする。 <div data-bbox="323 1066 1358 1350" style="border: 1px solid black; padding: 5px;"> <p>p_n の計算で一番苦勞するのは分子の値を求めるところだから、計算で分子の値を求める方法を考えよう。</p> <p>ここで、分子を $W(n)$ とする。つまり、人数が n のときに全員の座席が入れ替わる場合の数を $W(n)$ とする。</p> <p>今まで調べたことから $W(2) = \square$、$W(3) = \square$、$W(4) = \square$ である。</p> <p>$W(5)$ を計算で求められないか考えてみよう。</p> </div> <ul style="list-style-type: none"> ・ \square に当てはまる数を考えることで $W(n)$ の記号の意味について理解する。 	1	30%未満	2	30%以上～40%未満	3	40%以上～50%未満	4	50%以上～60%未満	5	60%以上～70%未満	6	70%以上	<p>○ p_n の値を求める過程のどこで一番苦勞しているかを考えさせ、分子の値をどのようにして求めるかに問題を焦点化させた。</p>
1	30%未満	2	30%以上～40%未満	3	40%以上～50%未満									
4	50%以上～60%未満	5	60%以上～70%未満	6	70%以上									

展開
①

○元の①の座席が②の座席になる場合に着目させた。

疑問 1

元の①の座席が②の座席になるときについて考える。①の座席が元の②の座席になる場合(つまり②-①-?-?-?-?となる場合)はなぜ2通りできるか理由を考えてみよう。

教師：②-?-?-?-?-?となる場合について何か気付きはありませんか。

生徒A：②-①-?-?-?-?となる場合は2通り。

②-?-①-?-?-?

②-?-?-①-?-?

②-?-?-?-①-?-?

の場合は3通りずつある。

教師：②-①-?-?-?-?となる場合は2通りとなる理由を説明できませんか。

教師：②-①-?-?-?-?となる場合は、これから席を入れ替わる人が何人いますか。

教師：W(2)、W(3)、W(4)を使って説明できませんか。

あるグループで話されていた内容

生徒A：数字が③、④、⑤となっているけど考え方は①、②、③のときと同じじゃない？

生徒B：あーなるほど。

◆場合の数について、樹形図、和の法則、積の法則を用いて考察することができる。

【数学的な見方や考え方 (1)】

(ワークシート)

B：③、④、⑤の並び方を具体的に書いて答えている。

A：③、④、⑤の3人が席を入れ替わる並び方だから $W(3)=2$ 通りと答えている。

(手立てⅡ)

生徒が自分たちで完全順列の規則性を考察できるように、段階を追って思考できるような発問を行う。

※ (手立てⅠ)

個人で考え自分の考えをもたせる。その後グループで話し合わせ、自分の考えを述べたり、疑問に思うことを尋ねたりすることができるようにする。



対話をすることで生徒の考えを引き出している様子

疑問 2

元の①の座席が②の座席になるときについて考える。①の座席が元の②の座席ではない場合はなぜ 9 通りできるか理由を考えてみよう。

教師：②-?-①-?-?

②-?-?-①-?

②-?-?-?-①

の場合は 3 通りずつ全部で 9 通りある。9 通りというのはなんとなく $W(4)$ と関係しそうだけど、そのなんとなくのところを上手に説明できませんか。

あるグループで話されていた内容

生徒 C：元の②の座席を①に書き直して①、③、④、⑤の 4 人が自分の番号の座席に座らないように座席を入れ替わるとよいので $W(4)$ 通り。

◆場合の数について、樹形図、和の法則、積の法則を用いて考察している。

【数学的な見方や考え方 (2)】

(ワークシート)

B：①、③、④、⑤の 4 人が席を入れ替わる並び方だから $W(4)=9$ 通りと答えている。

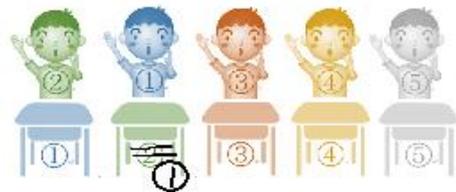
A：②-①-③-④-⑤の状態から、①、③、④、⑤の 4 人が席を入れ替わる並び方だから $W(4)=9$ 通りと答えている。

※ (手立て II)

生徒が自分たちで完全順列の規則性を考察できるように、段階を追って思考できるような発問を行う。

※ (手立て I)

個人で考え自分の考えをもたせる。その後グループで話し合わせ、自分の考えを述べたり、疑問に思うことを尋ねたりすることができるようにする。



生徒 C の考え

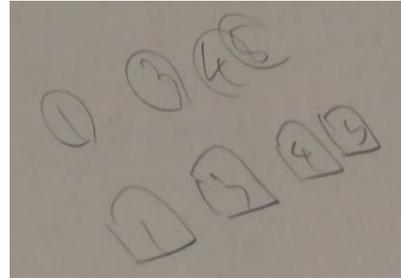
教師：今のC君の考えが理解できましたか。そうでない人はグループ内で話し合ってみてください。

あるグループで話されていた内容
「②の座席の数字を①に書き換えることで、①は①に座れない、③は③に座れない、④は④に座れない、⑤は⑤に座れない、だからW(4)になる。」

別のグループで話されていた内容
「①、③、④、⑤と①、③、④、⑤の完全順列になるんじゃない。」

※（手立てⅢ）

1人の生徒が発言した内容を、生徒全員が理解できるように、グループ内で協議できる時間を設ける。



生徒Cの発表を受けて、あるグループで話されていた際に書かれたメモ

まとめ

元の①の座席が②の座席となるとき

(i) ①と②の席が入れ替りになる場合はW(3)通り。

(ii) ①と②の席が入れ替りではない場合はW(4)通り。

①の座席だったところが②の座席となる場合は全部でW(3)+W(4)通りある。

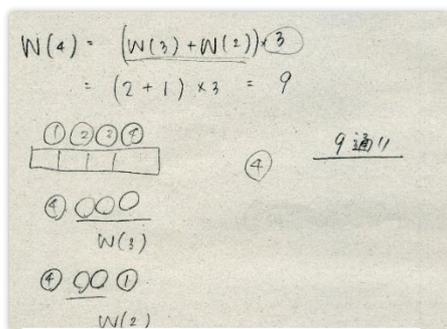
①の座席だったところが③、④、⑤の場合も同様に考えればよい。

よって、 $W(5) = \{W(3) + W(4)\} \times 4 = 44$

展開
②

同じ考え方で、W(4)を求められないか考えてみよう。

W(6)を求めてみよう。



W(4)についての記述の例

※（手立てⅣ）

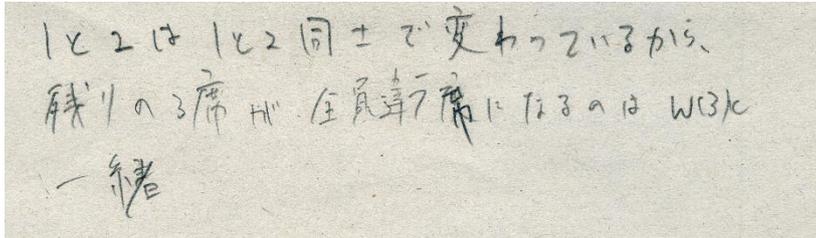
得られた関係式が、別の同じような事例でも成り立つかどうか考察させる。

授業を振り返って

- ・(手立てⅡ、Ⅰ)を取り入れて疑問1について生徒に考察させたところ、次の発言が聞かれました。

「最後の部分だけがW(3)。」
 「(W(3)=2を指さして) これと同じことを考えている。」

また、ワークシートには次のような解答が書かれていました(資料1)。

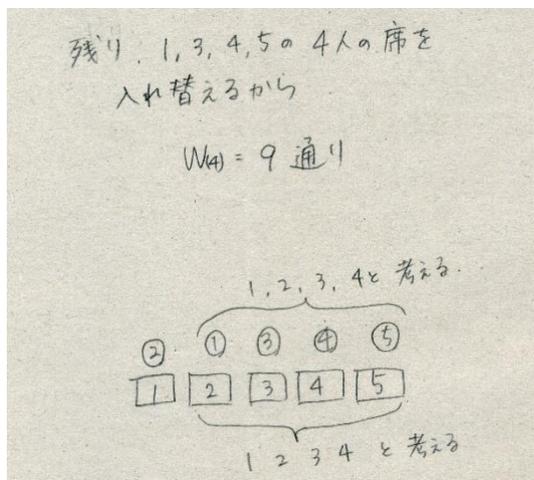


資料1 疑問1についての生徒の記述

- ・(手立てⅡ、Ⅰ)を取り入れて疑問2について考察させたところ、次の発言が聞かれました。

「元の②の座席を①に書き直して①、③、④、⑤の4人が自分の番号の座席に座らないように座席を入れ替わるとよい。よってW(4)通り。」

また、ワークシートにも次の資料2のような解答が書かれていました。

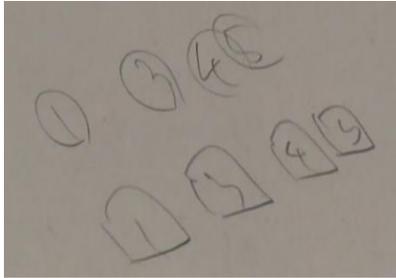


資料2 疑問2についての生徒の記述

段階を追って思考できるような発問を行ったことで、生徒は自分たちで完全順列の規則性を考察することができました。

- ・(手立てⅢ)を取り入れると、生徒は電子黒板を指さしたり、ワークシートに書いたりしながら話し合いを行っていました。その中で、次のような発言が聞かれました。

「②の座席の数字を①に書き換えることで、①は①に座れない、③は③に座れない、④は④に座れない、⑤は⑤に座れない、だから $W(4)$ になる。」
 「①、③、④、⑤と①、③、④、⑤の完全順列になるんじゃない（資料 3 参照）。」



資料 3 生徒 C の発表を受けて、ある
グループで話されていた際に
書かれたメモ

1 人の生徒が発言した内容についてグループで話し合う時間を設けたことで、他の生徒たちも規則性を考察することができていました。しかし、グループで話し合った後も「分からない」と手を挙げていた生徒がいました。話し合いを行っても生徒に疑問が残っていたため、理解している生徒に説明させるか、教師が説明を行う必要がありました。

- ・（手立てⅣ）を取り入れたことで、ワークシートには資料 4 の解答が見られました。

$$W(4) = (W(3) + W(2)) \times 3$$

$$= (2 + 1) \times 3 = 9$$

① ② ③ ④
 ④ 〇〇〇
 $W(3)$
 ④ 〇〇 ①
 $W(2)$

④ 9通り

資料 4 $W(4)$ についての記述の例

この生徒は疑問 1 で $W(3)$ についての考え方をグループの仲間の話を聞いて理解することができていました。同じような場面を考察することで理解を深め、自力で関係式をつくることができていました。

- ・（手立てⅤ、Ⅰ）を取り入れたことで、次の発言が聞かれました。

生徒 D : 「 $W(41) = \{W(39) + W(40)\} \times 40$ だね。」
 生徒 E : 「 $W(39)$ や $W(40)$ も同じやり方で求める…」
 生徒 D : 「永遠とやっていかないとダメじゃない…」

同様な関係式を繰り返し使っていくことで $W(41)$ の値を求められることに気付くことができました。

- ・前時の導入の段階で、 p_5 の分子である $W(5)$ の値を求めることができていたのはクラスの生徒の 48%でした。本時の授業を受けて $W(5)$ の値を求めることができたのは 84%でした。84%の中の 19%の生徒は $W(5)$ の値を求める過程を詳細に記述しており、思考力・判断力・表現力の高まりが見て取れました。残りの 65%の生徒は式のみ記述していたため、どのように考えて立式したかは分かりませんでした。立式の根拠が分かるように、ワークシートの問いを工夫することが課題となりました。
- ・疑問 1、2 において、話し合った内容をワークシートに記述していない生徒が見られました。考えたことを書きやすいように、ワークシートの問いを工夫することが課題となりました。