## ２　研究の実際

### (4)　実践事例２　数学②

指導計画

**〇単元名**

「第１章　場合の数と確率　第１節　場合の数」(数学Ａ　数研出版)

**〇単元の目標**

集合の要素の個数、数え上げの原則、順列、組合せについて理解し、基礎的な知識を習得するとともに技能に習熟し、具体的な場合の数を数学的に考察する能力を養い、数学のよさを認識しそれらを活用する。

**〇単元について**

ベン図や樹形図を用いたり、和の法則や積の法則を用いたりすることで、もれなく重複なく数え上げる方法について学習する。数え上げの原則、和の法則、積の法則、順列、組合せの一つ一つは理解しやすい。しかし、様々な場合の数を求めるには、場合に応じて数学的な見方や考え方を働かせる必要があり、そこに生徒は難しさを感じやすい。そこで、どのように考えて答えを導いたのか、過程を記述するように指導を行う。自分の考えを書いて、それを基に話合いをする活動を取り入れることで、思考力、判断力を高め、自分の考えを表現できる力を養う。また、身近な事象を扱うことで数学の実用性を認識させる。

**〇単元における工夫(思考力・判断力・表現力の育成を目指して)**

・自分の考えを書いて、それを基に話合いを行うことで、概念形成を行わせる。
・思考力を必要とする問題を積極的に授業で取り扱う。
・生徒に板書をさせて、表現力を養うような機会を設ける。

**〇本時の目標**

完全順列の総数がもつ規則性について、５個の場合を基にして、場合分けをしながら、考察することができる。

**〇本時における工夫(思考力・判断力・表現力の育成を目指して)**

・個人で考え自分の考えをもたせる。その後グループで話し合わせ、自分の考えを述べたり、疑問に思うことを尋ねたりすることができるようにする（手立てⅠ）。
・生徒が自分たちで完全順列の規則性を考察できるように、段階を追って思考できるような発問を行う（手立てⅡ）。
・１人の生徒が発表した考えを全員が理解できるように、グループで話し合う時間を設ける(手立てⅢ)。
・得られた関係式が、別の同じような事例でも成り立つかどうか考察させる（手立てⅣ)。
・課題の解決に向けて、学習した内容をどのように生かせばよいか考察させる（手立てⅤ）。

**授業の様子**　16／16 時間目（□…**評価**：B…「おおむね満足できる」状況
A…「十分満足できる」状況）

| 過程 | 学習活動<br>⊂⊃…教師と生徒のやり取り | 教師の働き掛け（○）、評価規準（◆）<br>アクティブ・ラーニングの手法（※） |
| --- | --- | --- |
| 導入 | ・$p_{41}$の値を予想する。 | |
| | 問題　41 人のクラスで席替えを行うとき、少なくとも 1 人が同じ席になる確率を予想してみよう。<br>1　30%未満<br>2　30%以上～40%未満<br>3　40%以上～50%未満<br>4　50%以上～60%未満<br>5　60%以上～70%未満<br>6　70%以上 | |
| | ・予想したことを、学習用ＰＣを用い、回答する。 | |
| | ・前時の課題の$p_5$、$1-p_5$について答え合わせをする。 | |
| | ・本時の目標の確認をする。 | ○$p_{\mathrm{n}}$の値を求める過程のどこで一番苦労しているかを考えさせ、分子の値をどのようにして求めるかに問題を焦点化させた。 |
| | $p_{\mathrm{n}}$の計算で一番苦労するのは分子の値を求めるところだから、計算で分子の値を求める方法を考えよう。<br>ここで、分子を W(n)とする。つまり、人数が n のときに全員の座席が入れ替わる場合の数を W(n)とする。<br>今まで調べたことから W(2)=□、W(3)=□、W(4)=□である。<br>W(5)を計算で求められないか考えてみよう。 | |
| | ・□に当てはまる数を考えることでW(n)の記号の意味について理解する。 | |

展開①

○元の①の座席が②の座席になる場合に着目させた。

疑問１
元の①の座席が②の座席になるときについて考える。①の座席が元の②の座席になる場合（つまり②－①－？－？－？となる場合）はなぜ２通りできるか理由を考えてみよう。

◆場合の数について，樹形図，和の法則，積の法則を用いて考察することができる。
【数学的な見方や考え方（1)】
（ワークシート）
Ｂ：③、④、⑤の並び方を具体的に書いて答えている。
Ａ：③、④、⑤の３人が席を入れ替わる並び方だから W(3)=2 通りと答えている。

教　師：②－？－？－？－？となる場合について何か気付きはありませんか。
生徒Ａ：②－①－？－？－？となる場合は２通り。
②－？－①－？－？
②－？－？－①－？
②－？－？－？－①
の場合は３通りずつある。
教　師：②－①－？－？－？となる場合は２通りとなる理由を説明できませんか。
教　師：②－①－？－？－？となる場合は、これから席を入れ替わる人が何人いますか。
教　師：W(2)、W(3)、W(4)を使って説明できませんか。

あるグループで話されていた内容
生徒Ａ：数字が③、④、⑤となっているけど考え方は①、②、③のときと同じじゃない？
生徒Ｂ：あーなるほど。

（手立てⅡ）
生徒が自分たちで完全順列の規則性を考察できるように、段階を追って思考できるような発問を行う。
※（手立てⅠ）
個人で考え自分の考えをもたせる。その後グループで話し合わせ、自分の考えを述べたり、疑問に思うことを尋ねたりすることができるようにする。

資料１　対話をすることで生徒の考えを引き出している様子

疑問２
元の①の座席が②の座席になるときについて考える。①の座席が元の②の座席ではない場合はなぜ９通りできるか理由を考えてみよう。

◆場合の数について，樹形図，和の法則，積の法則を用いて考察することができる。
【数学的な見方や考え方 (2)】
(ワークシート)
B：①、③、④、⑤の４人が席を入れ替わる並び方だから W(4)=9 通りと答えている。
A：②－①－③－④－⑤の状態から、①、③、④、⑤の４人が席を入れ替わる並び方だから W(4)=9 通りと答えている。

教　師：②－？－①－？－？
②－？－？－①－？
②－？－？－？－①
の場合は３通りずつ全部で９通りある。９通りというのはなんとなく W(4) と関係しそうだけど、そのなんとなくのところを上手に説明できませんか。

**あるグループで話されていた内容**

生徒Ｃ：元の②の座席を①に書き直して①、③、④、⑤の４人が自分の番号の座席に座らないように座席を入れ替わるとよいので W(4) 通り（**資料２**）。

（手立てⅡ）
生徒が自分たちで完全順列の規則性を考察できるように、段階を追って思考できるような発問を行う。
※（手立てⅠ）
個人で考え自分の考えをもたせる。その後グループで話し合わせ、自分の考えを述べたり、疑問に思うことを尋ねたりすることができるようにする。


**資料２　生徒Ｃの考え**

教　師：今のＣ君の考えが理解できましたか。そうでない人はグループ内で話し合ってみてください。

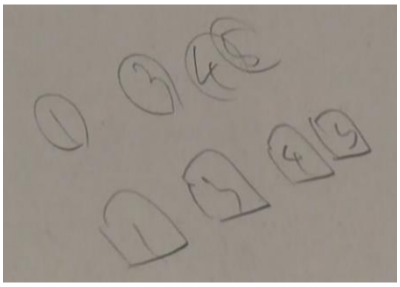
**あるグループで話されていた内容**

「②の座席の数字を①に書き換えることで、①は①に座れない、③は③に座れない、④は④に座れない、⑤は⑤に座れない、だからW(4)になる。」

**別のグループで話されていた内容**

「①、③、④、⑤と$\boxed{1}$、$\boxed{3}$、$\boxed{4}$、$\boxed{5}$の完全順列になるんじゃない（資料３参照）。」

※（手立てⅢ）
１人の生徒が発言した内容を、生徒全員が理解できるように、グループ内で協議できる時間を設ける。



**資料３　生徒Ｃの発表を受けて、あるグループで話されていた際に書かれたメモ**

$\boxed{\text{まとめ}}$

元の①の座席が②の座席となるとき

（ⅰ）①と②の席が入れ替りになる場合はW(3)通り。

（ⅱ）①と②の席が入れ替りではない場合はW(4)通り。

①の座席だったところが②の座席となる場合は全部でW(3)+W(4)通りある。

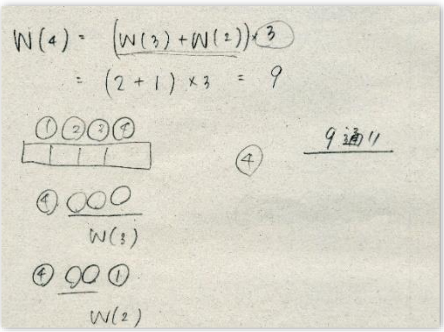
①の座席だったところが③、④、⑤の場合も同様に考えればよい。

よって、W(5)={W(3)+W(4)}×4=44

展開②

同じ考え方で、W(4)を求められないか考えてみよう。

W(6)を求めてみよう。




**資料４　W(4)についての記述の例**

※（手立てⅣ）
得られた関係式が、別の同じような事例でも成り立つかどうか考察させる。

$p_{41}$及び 1- $p_{41}$を求めるために W(41)について調べたい。これまで学習した内容を生かして、あなたならどのようにして W(41)を求めますか。W(41)を求める考え方を書いて下さい。

生徒D：W(41)={W(39)+W(40)}×40
だよね。
生徒E：W(39)やW(40)も同じやり方で求める…
生徒D：永遠とやっていかないとダメじゃない…

（手立てⅤ）
課題の解決に向けて、学習した内容をどのように生かせばよいかを考察させる。
※（手立てⅠ）
個人で考え自分の考えをもたせる。その後グループで話し合わせ、自分の考えを述べたり、疑問に思うことを尋ねたりすることができるようにする。

○W(41)={W(39)+W(40)}×40であるが、W(39)やW(40)の値をどのようにして求めるかを考えさせ、問題の解決に向けて見通しをもたせた。

○W(41)及び$p_{41}$、1- $p_{41}$のおおよその値を知る。

| n | W(n) | $p_n$ | 1- $p_n$ |
|---|---|---|---|
| 33 | 3194414033122660000000000000000000000 | 0.36788 | 0.6321 |
| 34 | 108610077126170000000000000000000000000 | 0.36788 | 0.6321 |
| 35 | 3801352699415960000000000000000000000000 | 0.36788 | 0.6321 |
| 36 | 136848697178975000000000000000000000000000 | 0.36788 | 0.6321 |
| 37 | 5063401795622060000000000000000000000000000 | 0.36788 | 0.6321 |
| 38 | 192409268233638000000000000000000000000000000 | 0.36788 | 0.6321 |
| 39 | 7503961461111890000000000000000000000000000000 | 0.36788 | 0.6321 |
| 40 | 300158458444476000000000000000000000000000000000 | 0.36788 | 0.6321 |
| 41 | 12306496796223500000000000000000000000000000000000 | 0.36788 | 0.6321 |

資料５　電子黒板に表示されたW(41)や$p_{41}$、$1-p_{41}$のおおよその値

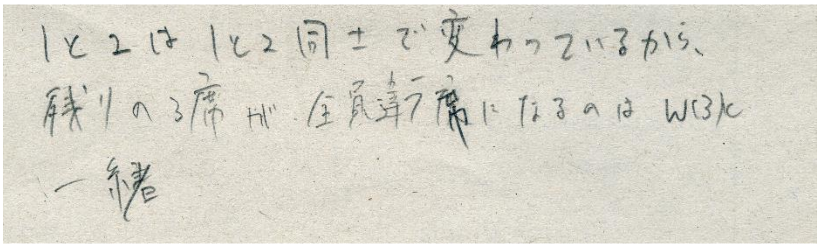
| | | |
|---|---|---|
| まとめ | ・簡単な場合を用いて考察することで規則性を発見しやすくし、規則性を生かして立式できたことが問題解決につながったことを振り返る。 | ○どのようにして問題を解決することができたか振り返らせた。 |

## 授業を振り返って

・（手立てⅡ、Ⅰ）を取り入れて疑問１について生徒に考察させたところ、次の発言が聞かれました。

> 「最後の部分だけがＷ(3)。」
> 「(Ｗ(3)=2 を指さして）これと同じことを考えている。」

また、ワークシートには次のような解答が書かれていました（**資料６**）。

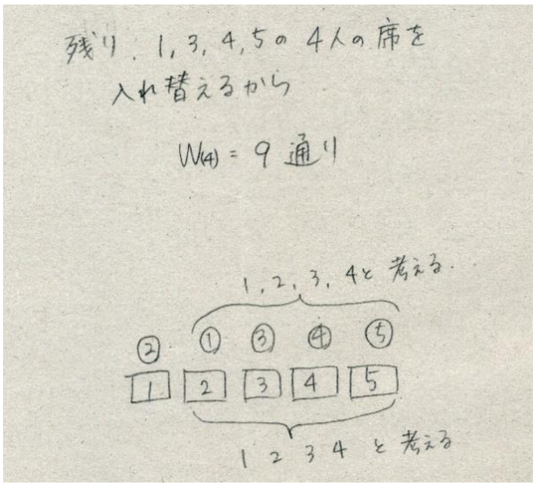



**資料６　疑問１についての生徒の記述**

（手立てⅡ、Ⅰ）を取り入れて疑問２について考察させたところ、次の発言が聞かれました。

> 「元の②の座席を①に書き直して①、③、④、⑤の４人が自分の番号の座席に座らないように座席を入れ替わるとよい。よってＷ(4)通り。」

また、ワークシートにも次の**資料７**のような解答が書かれていました。

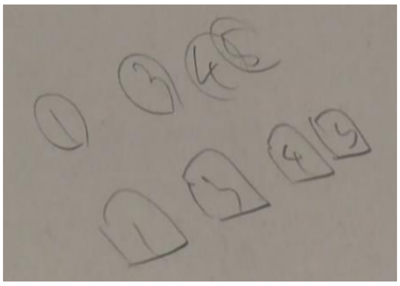



**資料７　疑問２についての生徒の記述**

段階を追って思考できるような発問を行ったことで、生徒は自分たちで完全順列の規則性を考察することができました。

・（手立てⅢ）を取り入れると、生徒は電子黒板を指さしたり、ワークシートに書いたりしながら話合いを行っていました。その中で、次のような発言が聞かれました。

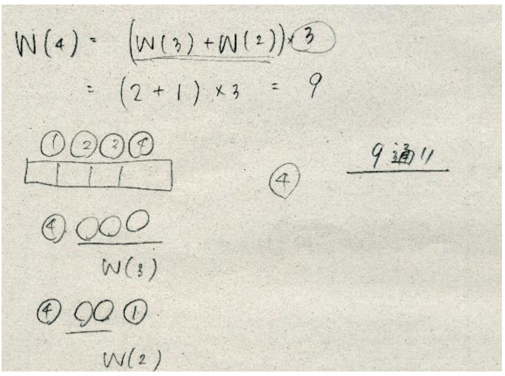
「②の座席の数字を①に書き換えることで、①は①に座れない、③は③に座れない、④は④に座れない、⑤は⑤に座れない、だから W(4)になる。」
「①、③、④、⑤と$\boxed{1}$、$\boxed{3}$、$\boxed{4}$、$\boxed{5}$の完全順列になるんじゃない（**資料３**参照)。」



**資料３　生徒Ｃの発表を受けて、ある グループで話されていた際に 書かれたメモ**

１人の生徒が発言した内容についてグループで話し合う時間を設けたことで、他の生徒たちも規則性を考察することができていました。しかし、グループで話し合った後も「分からない」と手を挙げていた生徒がいました。話合いを行っても生徒に疑問が残っていたため、理解している生徒に説明させるか、教師が説明を行う必要がありました。

・（手立てⅣ）を取り入れたことで、ワークシートには**資料４**の解答が見られました。




**資料４　W(4)についての記述の例**

この生徒は疑問１で W(3)についての考え方をグループの仲間の話を聞いて理解することができていました。同じような場面を考察することで理解を深め、自力で関係式をつくることができていました。

・（手立てⅤ、Ⅰ）を取り入れたことで、次の発言が聞かれました。

生徒Ｄ：「W(41)={W(39)+W(40)}×40 だよね。」
生徒Ｅ：「W(39)や W(40)も同じやり方で求める…」
生徒Ｄ：「永遠とやっていかないとダメじゃない…」

同様な関係式を繰り返し使っていくことでW(41)の値を求められることに気付くことができました。

・前時の導入の段階で、$p_5$の分子であるW(5)の値を求めることができていたのはクラスの生徒の48%でした。本時の授業を受けてW(5)の値を求めることができたのは84%でした。84%の中の19%の生徒はW(5)の値を求める過程を詳細に記述しており、思考力・判断力・表現力の高まりが見て取れました。残りの65%の生徒は式のみ記述していたため、どのように考えて立式したかは分かりませんでした。立式の根拠が分かるように、ワークシートの問いを工夫することが課題となりました。

・疑問１、２において、話し合った内容をワークシートに記述していない生徒が見られました。考えたことを書きやすいように、ワークシートの問いを工夫することが課題となりました。