中学校数学

第２学年

５　図形の性質と証明

［問題］

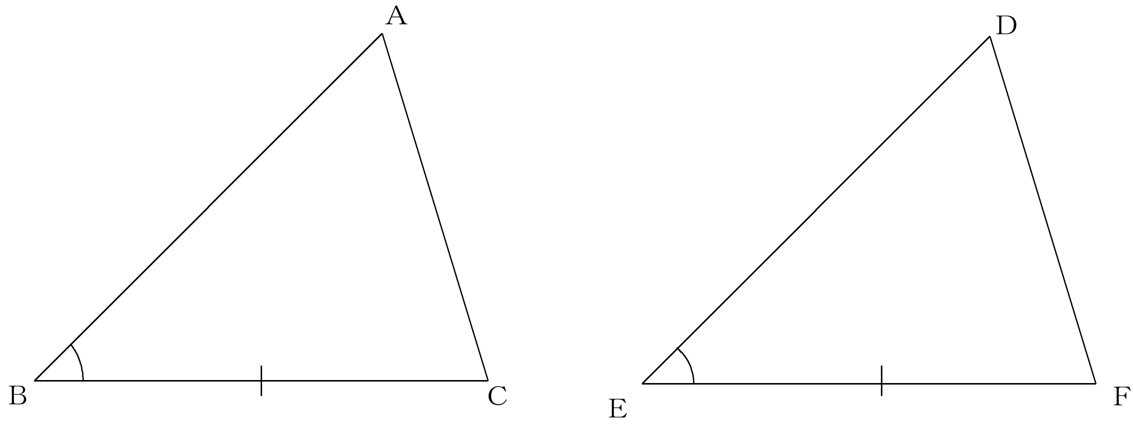
中学校

年　組　　号 氏名

■知識･技能の習得を図る問題　　　　年　　組　　号　氏名

■練習問題①

次の図で，△ABCと△DEFが合同であることを証明しようとしています。BC＝EF，∠ABC＝∠DEFであることは分かっています。



三角形の合同条件を用いて証明するために，あと１つどのようなことが分かればよいですか。下の［　　＝　　］に分かればよいことを書きなさい。

・分かっていること

BC　＝EF

∠ABC　＝∠DEF

・分かればよいこと

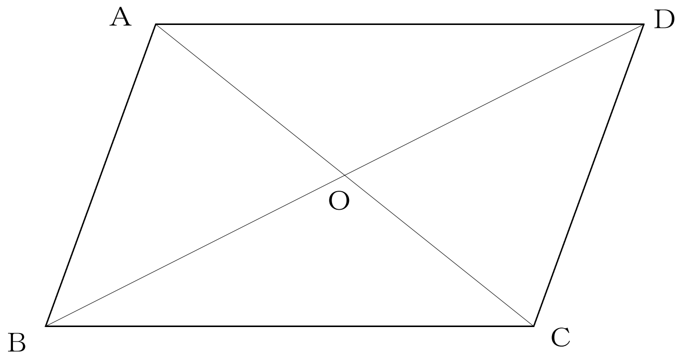
［　　　＝　　　］

■知識・技能の習得を図る問題　　　　年　組　号　氏名

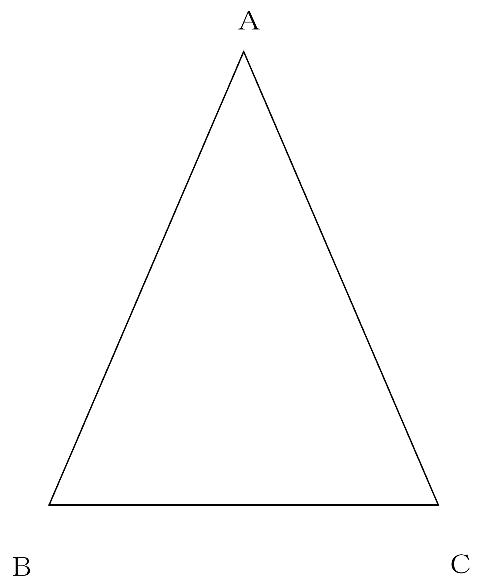
■練習問題②

次の問いに答えなさい。

(1)　下の四角形ABCDは，２組の向かいあう辺がそれぞれ平行であるとき，平行四辺形になります。
下線部を，下の図の四角形ABCDの辺と，記号 // を使って表すと，
「AD // BC, AB // DC」
となります。
この他にもあと４つ平行四辺形になるための条件があります。その４つの条件を記号∠，//，＝などを使って表しなさい。ただし，点Oは四角形の対角線AC, BDの交点とします。



(2)　次の図で，△ABCはAB＝ACの二等辺三角形です。



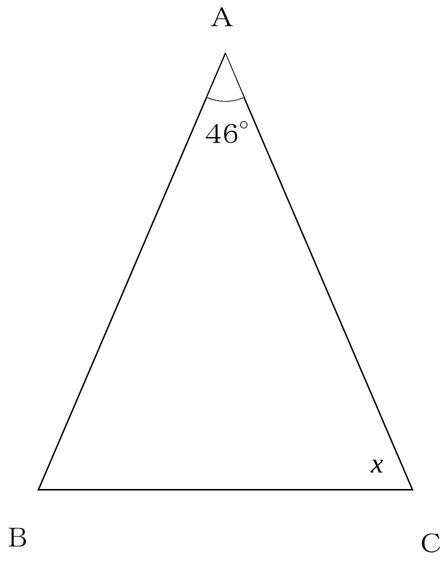
　この二等辺三角形に，『AB＝BC』（またはAC＝BC）という条件が付け加われば正三角形になります。これ以外に，付け加えれば△ABCが正三角形になる条件があります。その条件を記号で答えなさい。

■知識・技能の習得を図る問題　　　　年　　組　　号　氏名

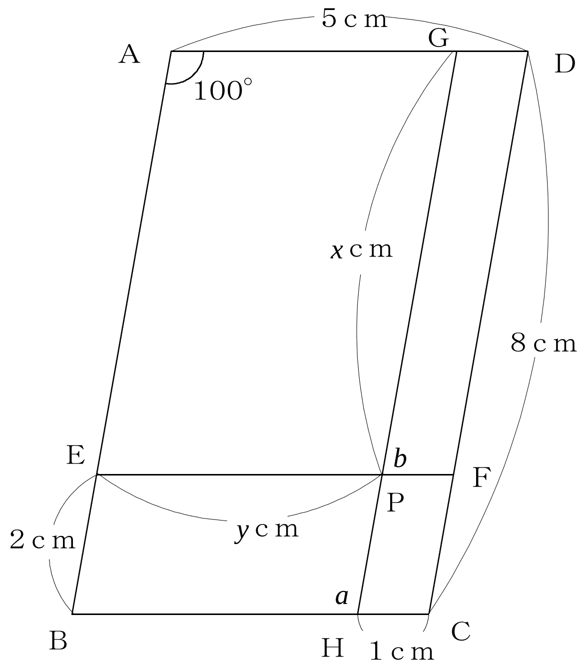
■練習問題③

次の角度や辺の長さを求めなさい。

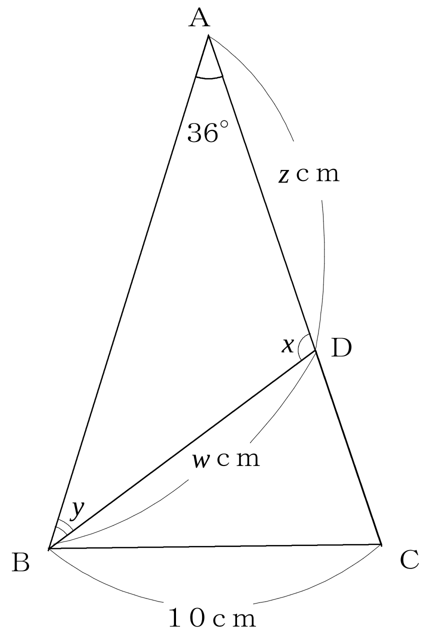
(1)　△ABCがAB＝ACの二等辺三角形のとき，∠xの大きさを求めなさい。



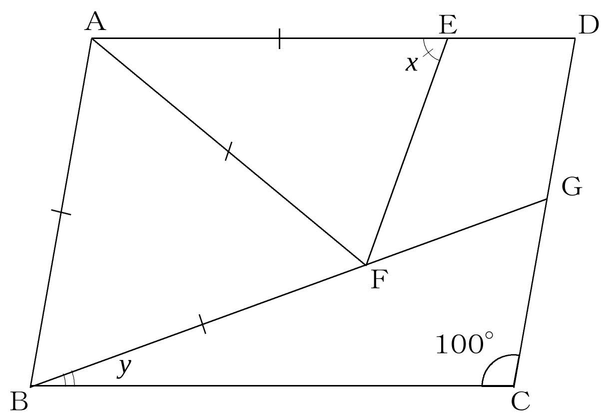
(2)　四角形ABCDが平行四辺形で，AB // GH，AD // EFのとき，x，yの値と，∠a，∠bの大きさをそれぞれ求めなさい。



(3)　△ABCはAB＝ACの二等辺三角形です。∠Bの二等分線と辺ACとの交点をDとする。このとき，w，zの値と，∠x，∠yの大きさを，それぞれ求めなさい。



(4)　四角形ABCDは∠C＝100°の平行四辺形で，△ABFはABを１辺とする正三角形とする。辺AD上にAF＝AEとなる点Eをとり，BFの延長と辺DCの交点をGとする。このとき，∠x，∠yの大きさをそれぞれ求めなさい。

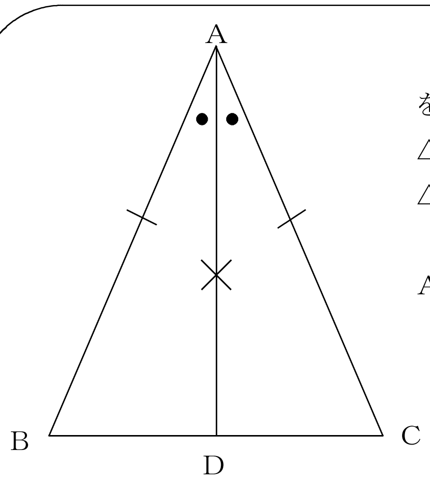


■知識･技能の習得を図る問題　　　　年　　組　　号　氏名

■練習問題④

「二等辺三角形の底角は等しい」ことを下のように証明しました。あとの問いに答えなさい。

【証明】



AB＝ACの二等辺三角形の，頂角の二等分線をひき，辺ＢＣとの交点をＤとする。

△ABDと△ACDで，

△ABCは二等辺三角形だから，

AB ＝AC　　……①

ADは∠Aの二等分線だから，

∠BAD ＝∠CAD　　……②

共通な辺だから，

AD ＝AD　　……③

①，②，③より，

（　　　　　　　　）ので，

△ABD≡△ACD

よって，［　　　　　　　　］から，

∠B＝∠C

(1)　（　　　　）にあてはまる三角形の合同条件を答えなさい。

(2)　［　　　　］にあてはまる言葉を答えなさい。

(3)　△ABDと△ACDの合同から，∠B＝∠C以外のことも分かります。その分かることを下の**ア**から**エ**の中から１つ選びなさい。

ア　ADはBCを垂直に２等分する。

イ　AB＝ADになる。

ウ　AB＝BC＝CAとなり△ABCは正三角形になる。

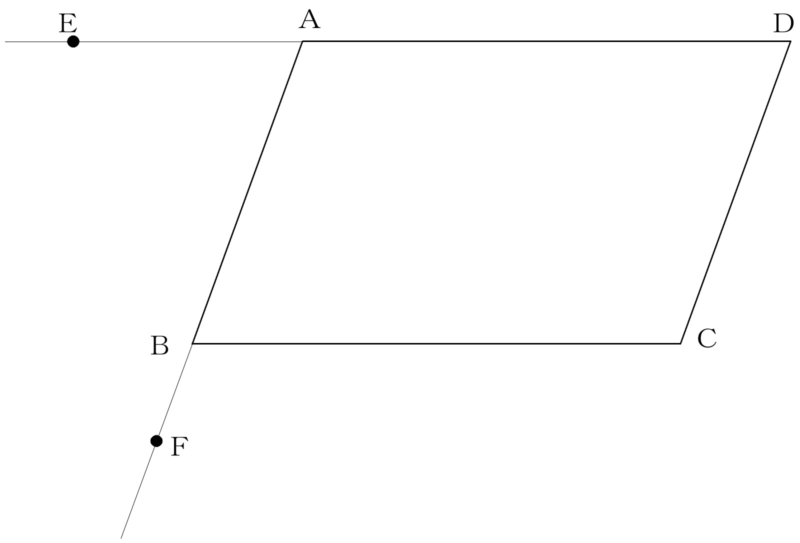
エ　AB＝ACの二等辺三角形△ABCでも，上の図と異なる場合は常に，∠B＝∠Cになるとは限らない。

■知識・技能の習得を図る問題　　　　　　年　　組　　号　氏名

■練習問題⑤

「平行四辺形の向かい合う角は等しい」ということを証明しました。あとの問いに答えなさい。

【証明】



上の図の▱ABCDで，辺DAの延長上に点Eをとり，辺ABの延長上に点Fをとる。
▱ABCDだから，AD//BC。よって，

∠DAB＝（　ア　）　……①

また，AB//DCより，

（　ア　）＝∠C　……②

①，②より，

∠DAB＝∠C　……③

同様に，AD//BCより，

∠ABC＝（　イ　）　……④

また，AB//DCより，

（　イ　）＝∠D　……⑤

④，⑤より，

∠ABC＝∠D　……⑥

よって③，⑥より，平行四辺形の向かい合う角は等しい。

(1)　（　　ア　　），（　　イ　　）にあてはまる記号をかきなさい。

(2)　①，②，④，⑤の根拠となることがらを下の**ア**から**エ**の中からそれぞれ１つずつ選びなさい。

ア　対頂角が等しいから

イ　同位角が等しいから

ウ　錯角が等しいから

エ　三角形の内角の和は180°だから

(3)　平行四辺形の性質は，上で証明したことの他にもまだいくつかあります。平行四辺形の性質として正しいものを下の**ア**から**オ**の中から１つ選びなさい。

ア　∠A＝∠B，∠C＝∠Dである。

イ　∠A＋∠B＝180°，∠C＋∠D＝180°である。

ウ　対角線が垂直に交わっている。

エ　対角線の長さが等しい。

オ　AB＝BC，AD＝DCである。

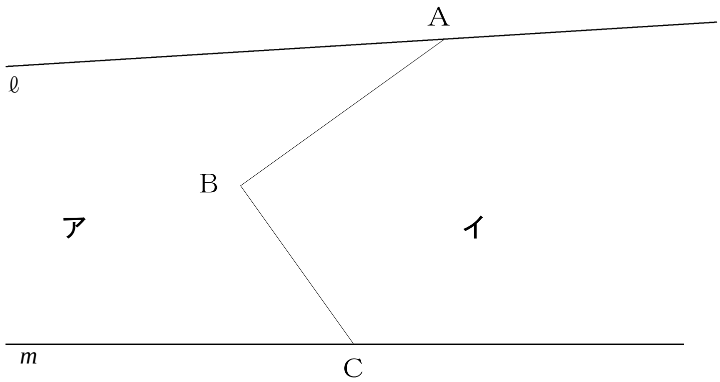
■知識･技能の習得を図る問題　　　　　年　　組　　号　氏名

■練習問題⑥

次の問いに答えなさい。

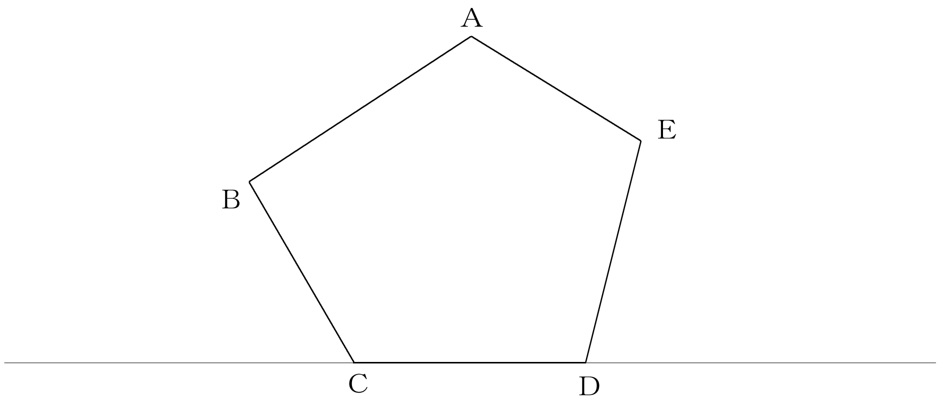
(1)　下の図のように，直線 ℓ と m の間にあり，折れ線ABCを境界とする２つの土地**ア**，**イ**があります。それぞれの土地の面積を変えないで，境界を点Ｃを通る線分CDに改めるとき，点Ｄの位置を作図により求めなさい。

ただし，点Ｄは直線 ℓ 上にあるものとします。



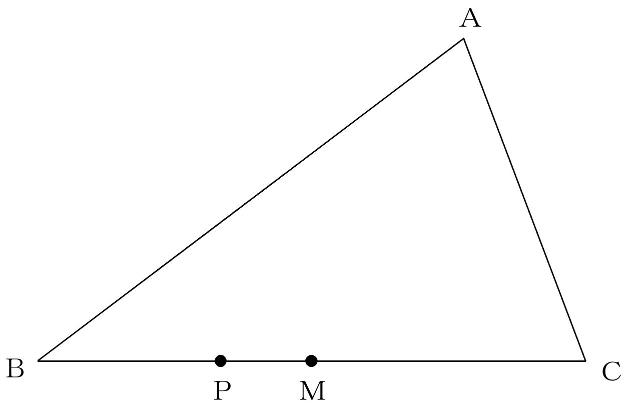
(2)　次の五角形ABCDEと同じ面積の三角形AFGを作図しなさい。

ただし，点F, Gは直線CD上にあるものとします。



(3)　次の三角形ABCで，点Ｐを通り，三角形ABCの面積を２等分する直線をかきなさい。

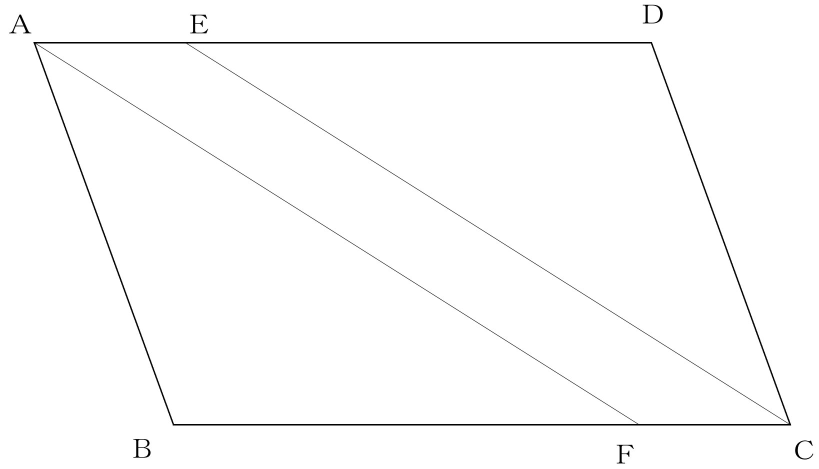
ただし，点Mは，BCの中点とします。



■知識・技能の習得を図る問題　　　　年　　組　　号　氏名

■練習問題⑦

下の図のように，平行四辺形ABCDの辺AD, BC上に，AE＝CFとなる点E, Fをそれぞれとります。このときできる四角形AFCEが平行四辺形なることを証明しました。あとの問いに答えなさい。



【証明】

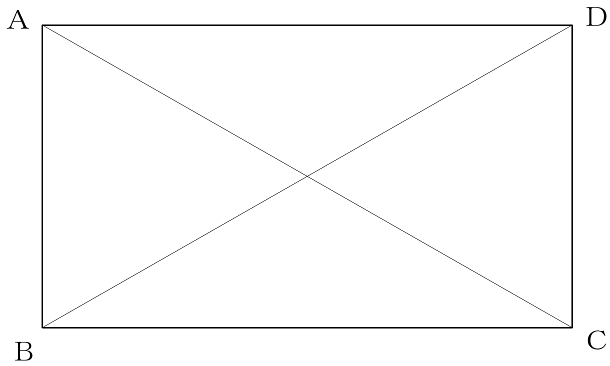
四角形AFCEで，
四角形ABCDが平行四辺形であることより，向かい合う辺はそれぞれ平行なので，
（　　ア　　）……①
仮定から，
（　　イ　　）……②
①，②から，
（　　ウ　　）から
四角形AFCEは平行四辺形になる。

上の証明の中で，**ア**，**イ**にはあてはまる式を，**ウ**には平行四辺形になるための条件を答えなさい。

■知識・技能の習得を図る問題　　　　　年　　組　　号　氏名

■練習問題⑧

下の図の四角形ABCDで，卓也さんと紳太郎さんが証明を考えています。あとの問いに答えなさい。



卓也さんは，次のように，「四角形ABCDが長方形ならばAC＝BDである」ことを証明しました。

【証明】

△ABCと△DCBで，四角形ABCDが長方形であれば，

AB　＝（　①　）

∠ABC　＝（　②　）＝90°

共通な辺だから　BC　＝（　③　）

よって，（　④　）ので，

△ABC≡△DCB

だから，

AC＝BD

となる。

(1)　上の①から③には記号を，④には合同条件を書きなさい。

紳太郎さんは，卓也さんが証明した「四角形ABCDが長方形ならばAC＝BDである」ことの逆を証明しようとしました。

(2)　上の＿＿＿のことがらの逆を答えなさい。

(3)　(2)で答えた逆のことがらが，正しいか正しいとはいえないかを答えなさい。また，正しいとはいえない場合は，その例を１つ答えなさい。

中学校数学

第２学年

５　図形の性質と証明

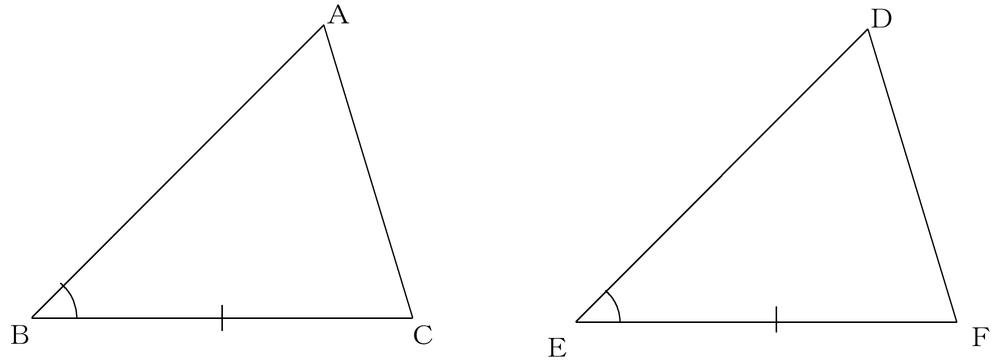
［解答例］

中学校

年　組　　号 氏名

■知識・技能の習得を図る問題[解答]　　　年　　組　　号　氏名

■練習問題①



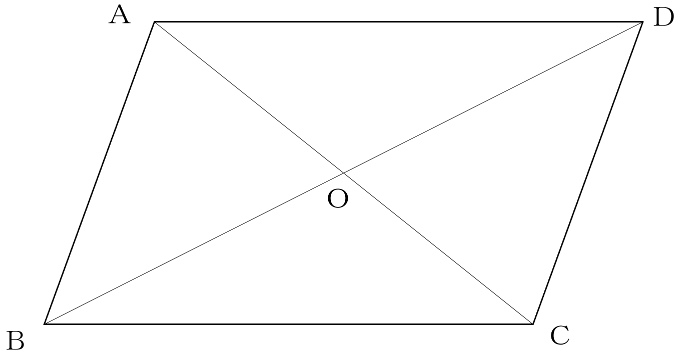
BC＝EF，∠ABC＝∠DEFであることは分かっているので，あと１つ分かれば合同がいえる。
AB＝DEならば，２辺とその間の角がそれぞれ等しいから合同がいえる。
∠C＝∠Fならば，１辺とその両端の角がそれぞれ等しいから合同がいえる。

答え　AB＝DE
または
∠C＝∠F（∠ACB＝∠DFE）

■知識・技能の習得を図る問題[解答]　　　年　　組　　号　氏名

■練習問題②

(1)



平行四辺形になるための条件は次の５つ。（矢印の右側は，記号で表したもの）

①２組の向かい合う辺がそれぞれ平行（定義）。→　「AB∥DC，AD∥BC」

②２組の向かい合う辺がそれぞれ等しい。　→　「AB＝DC，AD＝BC」

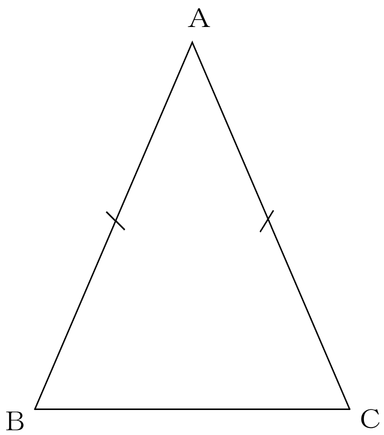
③２組の向かい合う角がそれぞれ等しい。　→　「∠BAD＝∠DCB，∠ABC＝∠CDA」

④対角線がそれぞれの中点で交わる。　→　「AO＝CO，BO＝DO」

⑤１組の向かい合う辺が等しくて平行。　→　「AB＝DC，AB∥DC」または，「AD＝BC，AD∥BC」

答え
・AB＝DC，AD＝BC
・∠BAD＝∠DCB，∠ABC＝∠CDA
・AO＝CO，BO＝DO
・AB＝DC，AB∥DC
　または，
　AD＝BC，AD∥BC

(2)



　二等辺三角形だから，底角は等しい。
よって，
　　　∠B＝∠C
これに，∠Aが等しいことがいえれば，△ABCは，
正三角形になる。

答え　∠A＝∠B
　または，
　∠A＝∠C

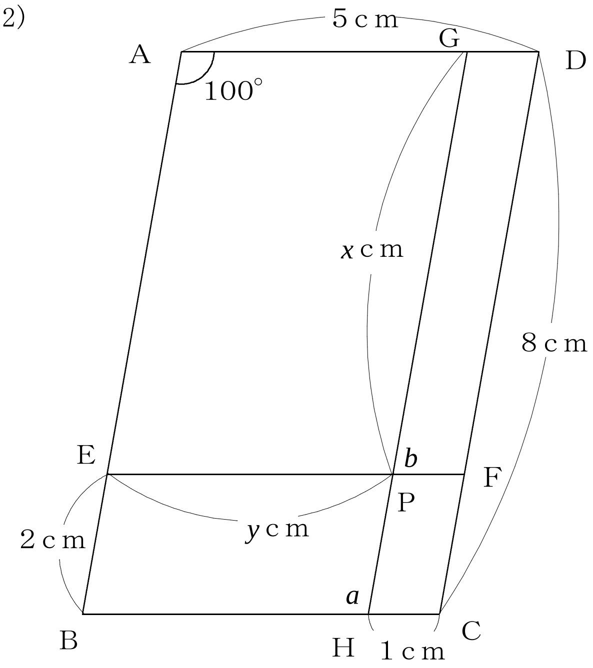
■知識・技能の習得を図る問題[解答]　　　年　　組　　号　氏名

■練習問題③

(1)　$\angle x = (180^\circ - 46^\circ) \div 2$
　　　　$= 67^\circ$

答え　$\angle x = 67^\circ$

(2)



▱ABCDで，与えられた条件から，中にできる四角形はすべて平行四辺形である。
よって，平行四辺形の性質から，

$x = 8 - 2 = 6$

$y = 5 - 1 = 4$

となる。また，

$\angle a = \angle A = 100^\circ$

$\angle b = 180^\circ - \angle GPE$

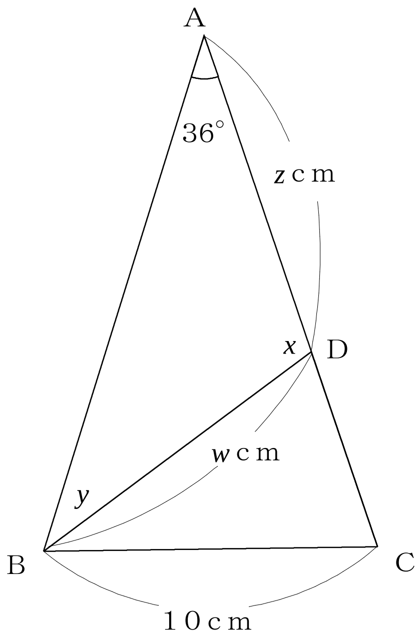
$= 180^\circ - \angle A$

$= 180^\circ - 100^\circ$

$= 80^\circ$

答え　$x = 6$cm，$y = 4$cm
　　　$\angle a = 100^\circ$，$\angle b = 80^\circ$

(3)



△ＡＢＣは二等辺三角形だから，

∠Ｂ＝∠Ｃ

＝(180°－36°)÷2

＝72°

また，∠DBCは∠Bの半分だから，

∠y＝∠DBC

＝72°÷2

＝36°

∠y＝36°

一方，

∠CDB＝180°－∠C－∠DBC

＝180°－72°－36°

＝72°

よって，△BDCも底角が72°の二等辺三角形になる。

したがって，

BC＝BD

＝10cm

また，△ABDも二等辺三角形になる。このことから，角度や辺の長さが求められる。

AD＝BD

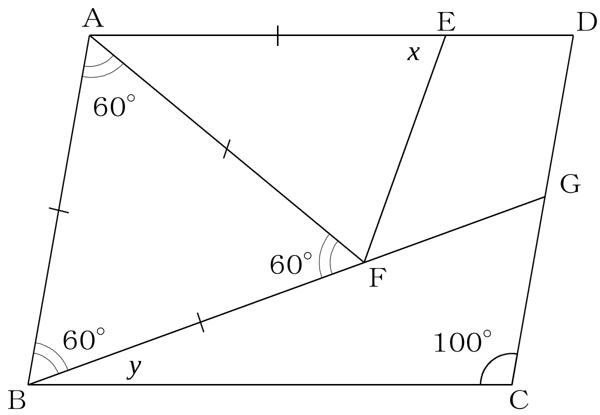
∠x＝180°－36°×2

＝108°

答え　∠x＝108°，∠y＝36°

w＝z＝10cm

(4)



四角形ABCDは平行四辺形より，２組の向かいあう角はそれぞれ等しいから，

∠BAE＝∠C＝100°

△ABFは正三角形だから，

∠EAF＝∠BAE－60°

＝100°－60°

＝40°

よって，

∠x＝(180°－40°)÷2

＝70°

また，

∠BAD＝∠C＝100°，∠ABC＝∠D，

四角形の内角の和は360°だから，

∠BAE＋∠ABC＋∠C＋∠D＝360°

2×∠ABC＋100°＋100°＝360°

よって，

∠ABC＝80°

これから，

∠y＝80°－∠ABF

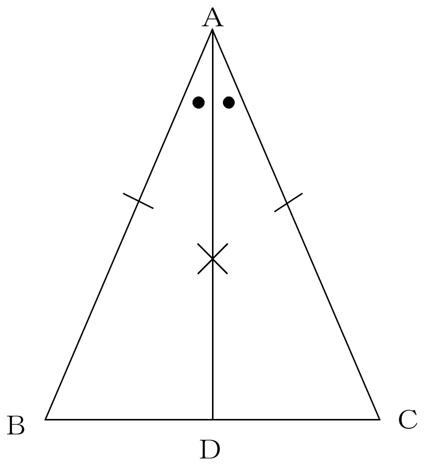
＝80°－60°

＝20°

答え　∠x＝70°，∠y＝20°

■知識・技能の習得を図る問題[解答]　　　年　　組　　号　氏名

■練習問題④



AB＝ACの二等辺三角形の，頂角の二等分線をひき，辺ＢＣとの交点をＤとする。
△ABDと△ACDで，
△ABCは二等辺三角形だから，
AB ＝AC　　……①
ADは∠Aの二等分線だから，
∠BAD ＝∠CAD　……②
共通な辺だから，
AD ＝AD　　……③
①，②，③より，
（**２辺とその間の角がそれぞれ等しい**）ので，
△ABD≡△ACD
よって，［**合同な図形では対応する角の大きさは等しい**］から，
∠B＝∠C

(1)　上の証明を参考にするとよい。
答え　２辺とその間の角がそれぞれ等しい

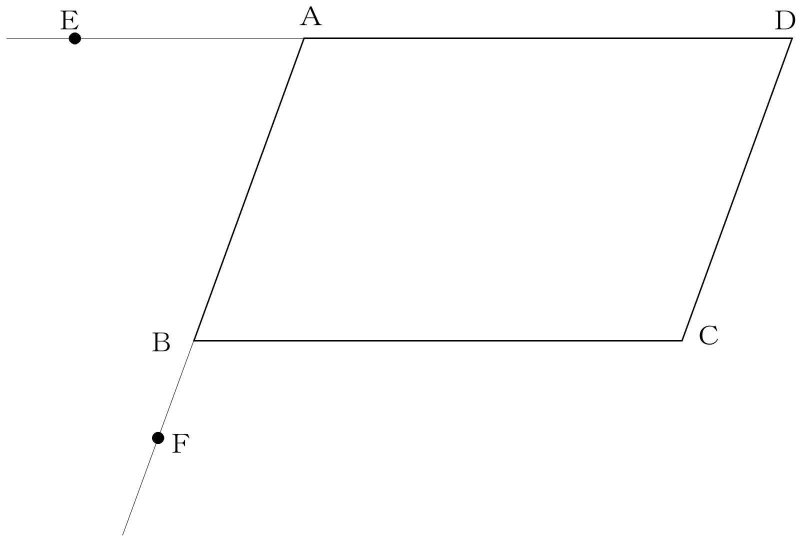
(2)　上の証明を参考にするとよい。
答え　合同な図形では対応する角の大きさは等しい

(3)　頂角の二等分線は，底辺を垂直に２等分する。
答え　**ア**

■知識・技能の習得を図る問題[解答]　　年　組　号　氏名

■練習問題⑤

証明は次の通り。



上の図の▱ABCDで，辺DAの延長上に点Ｅをとり，辺ABの延長上に点Ｆをとる。
▱ABCDだから，AD // BC。よって，

∠DAB＝(　∠ＣＢＦ　)　……①

また，AB // DCより，

(　∠ＣＢＦ　)＝∠C　……②

①，②より，

∠DAB＝∠C　……③

同様に，AD // BCより，

∠ABC＝(　∠ＥＡＢ　)　……④

また，AB // DCより，

(　∠ＥＡＢ　)＝∠D　……⑤

④，⑤より，

∠ABC＝∠D　……⑥

よって③，⑥より，平行四辺形の向かい合う角は等しい。

(1)　上の証明を参考に考えるとよい。

答え　**ア**……∠CBF（または，∠FBC）
イ……∠EAB（または，∠BAE）

(2)　答えは次のとおり。

答え　①……**イ**，②……**ウ**
④……**ウ**，⑤……**イ**

(3)　平行四辺形の性質は，**イ**だけである。

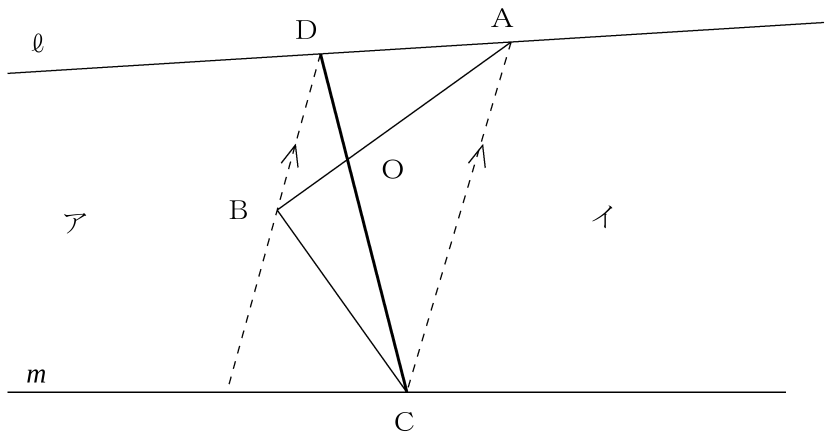
答え　**イ**

■知識・技能の習得を図る問題[解答]　　　　年　　組　　号　氏名

■練習問題⑥

解答は下のとおり。

(1)



①線分ACをひく。

②線分ACと平行で，点Bを通る直線をひく。

③直線ℓと②の直線の交点をＤとすると，△ABCと△ADCは底辺が共通で，高さが等しいので，△ABCと△ADCの面積は等しい。

④境界線をABからCDとすると，△BOCがアの土地になるが，その代わり△DOAが新たにイの土地になる。よって，

△ABC＝△ADCより，両辺から△AOCの面積をひくと，

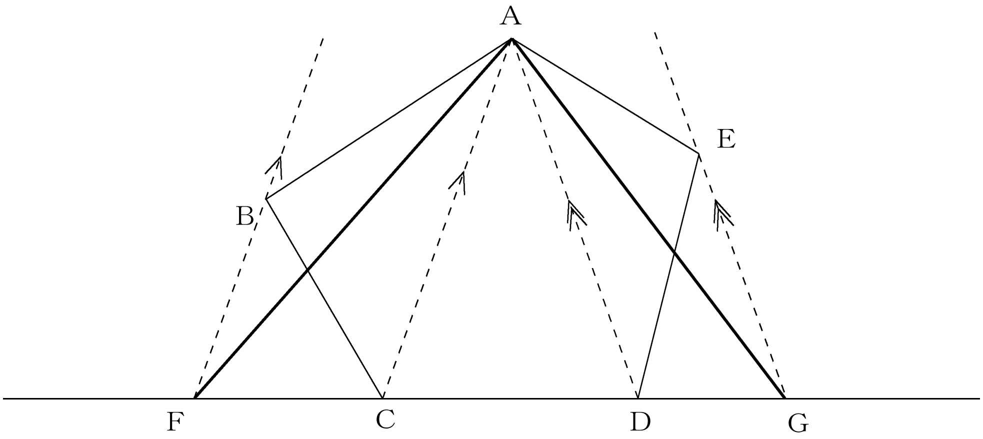
△ABC－△AOC＝△ADC－△AOC

△BOC＝△DOA

となり，ア，イの面積は変わらない。

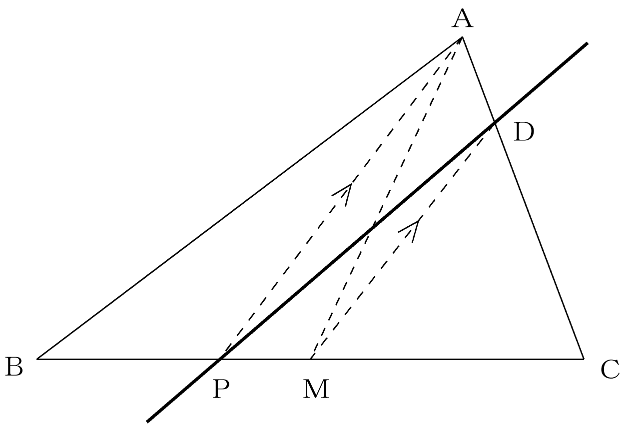
⑤よって，線分CDが新しい境界になる。

(2)



①線分ACをひく。
②線分ＡＣに平行で，点Ｂを通る直線をひき，直線CDとの交点を点Ｆとする。
△ABCと△AFCは，底辺（AC）が共通で，高さが等しいので，面積が等しい。
△ABC＝△AFC
③線分ＡＤをひく。
④線分ＡＤに平行で，点Ｅを通る直線をひき，直線CDとの交点を点Ｇとする。
△AEDと△AGDは，底辺（AD）が共通で，高さが等しいので，面積が等しい。
△AED＝△AGD
⑤五角形ABCDE＝△ABC＋△ACD＋△AED
＝△AFC＋△ACD＋△AGD
＝△AFG

(3)

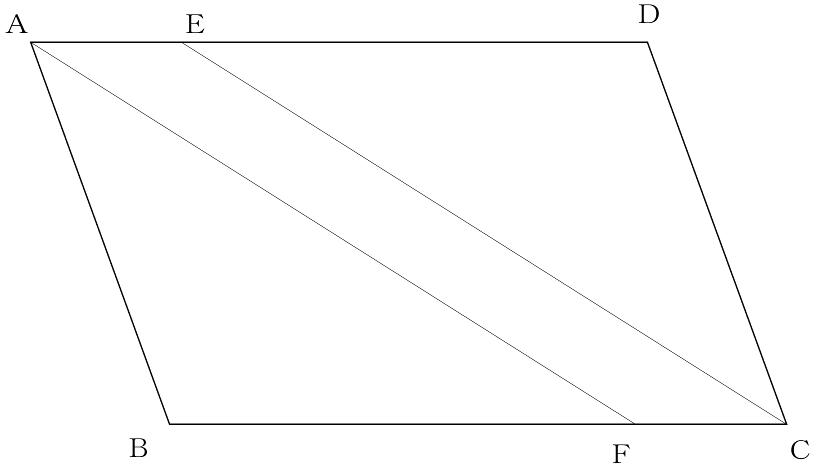


①線分AM，APをひく。
②線分APと平行で点Mを通る直線をかき，ACとの交点をＤとする。
ＡMは△ＡＢＣの面積の二等分線である。また，△APMと△APDは，底辺（AP）が共通で，高さも等しいので面積は等しい。よって，△APM＝△APD。
③よって，点Ｐと点Ｄを結ぶ直線が△ABCを点Ｐを通って２等分する直線である。

知識・技能の習得を図る問題[解答]　　　　年　　組　　号　氏名

■練習問題⑦

解答は下の通り。



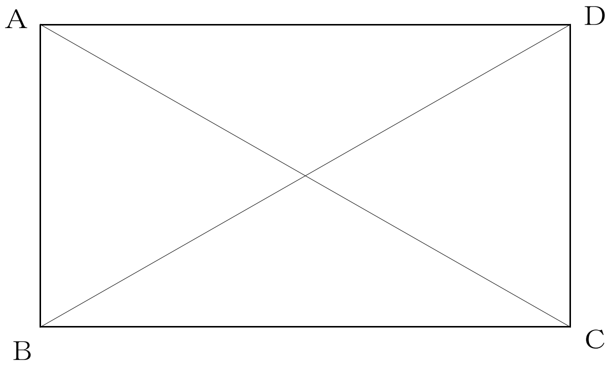
証明

四角形AFCEで，
四角形ABCDが平行四辺形であることより，向かい合う辺はそれぞれ平行なので，
（　　ＡＥ∥ＣＦ　　）……①
仮定から，
（　　ＡＥ＝ＣＦ　　）……②
①，②から，
（１組の向かい合う辺が等しくて平行）から
四角形AFCEは平行四辺形になる。

答え　**ア**……AE∥CF　　**イ**……AE＝CF
ウ……１組の向かい合う辺が等しくて平行

■知識・技能の習得を図る問題[解答]　　　年　　組　　号　氏名

■練習問題⑧



【証明】

△ABCと△DCBで，四角形ABCDが長方形であれば，

AB　＝（　**ＤＣ**　）

∠ABC　＝（　**∠ＤＣＢ**　）＝90°

共通な辺だから　BC　＝（　**ＣＢ**　）

よって，（　**２辺とその間の角がそれぞれ等しい**　）ので，

△ABC≡△DCB

だから，

AC＝BD

となる。

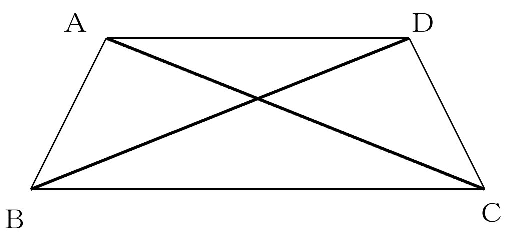
(1)　上の証明を参考にするとよい。

答え　①……ＤＣ　②……ＣＢ　③……∠ＤＣＢ
④……２辺とその間の角がそれぞれ等しい

(2)　仮定と結論を入れかえるとよい。

答え　AC＝BDならば四角形ABCDは長方形である

(3)　四角形ABCDでAC＝BDであったとしても，次のような台形が考えられる。



答え　正しくない。