

中学校数学科

2年生

5 図形の性質と証明

[問題]

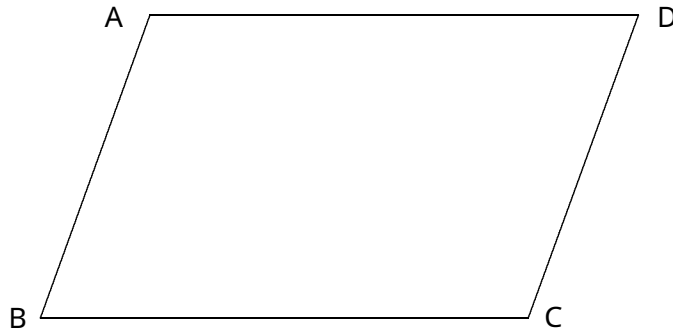
中学校

年 組 号 氏名

知識・技能の習得を図る問題 年 組 号 氏名

全国学力・学習状況調査 A問題

- 1 下の四角形 $ABCD$ において、「 $AB \parallel DC$, $AB = DC$ 」が成り立っています。このことは平行四辺形になるための条件に当てはまっているので、四角形は平行四辺形になることが分かります。【H19】



上の子線部「 $AB \parallel DC$, $AB = DC$ 」が表しているものを、下のアからオの中から1つ選びなさい。

- ア 2組の向かい合う辺がそれぞれ平行である。
- イ 2組の向かい合う辺がそれぞれ等しい。
- ウ 2組の向かい合う角がそれぞれ等しい。
- エ 対角線がそれぞれの中点で交わる。
- オ 1組の向かい合う辺が平行でその長さが等しい。

全国学力・学習状況調査 A問題

2 下のように「平行四辺形の2組の向かい合う辺はそれぞれ等しい」ことを証明しました。【H19】

証明

平行四辺形ABCDの対角線ACをひく。

$\triangle ABC$ と $\triangle CDA$ において、

平行線の錯角は等しいから、

$AB \parallel DC$ より、

$$\angle BAC = \angle DCA \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$AD \parallel BC$ より、

$$\angle BCA = \angle DAC \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

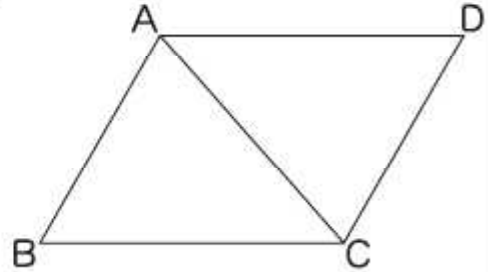
また、 $AC = CA$ (AC は共通) $\dots\dots \textcircled{3}$

$\textcircled{1}$ 、 $\textcircled{2}$ 、 $\textcircled{3}$ より、1辺とその両端の角がそれぞれ等しいから、

$$\triangle ABC \equiv \triangle CDA$$

よって、 $AB = CD$ 、 $BC = DA$

したがって、平行四辺形の2組の向かい合う辺はそれぞれ等しい。



ある学級で、この証明について下のアからエのような意見が出されました。正しいものを1つ選びなさい。

ア 上のように証明しても、平行四辺形の2組の向かい合う辺がそれぞれ等しいかどうかは測って確認しなければならない。

イ 上のように証明しても、ほかの平行四辺形については、2組の向かい合う辺がそれぞれ等しいことを、もう一度証明する必要がある。

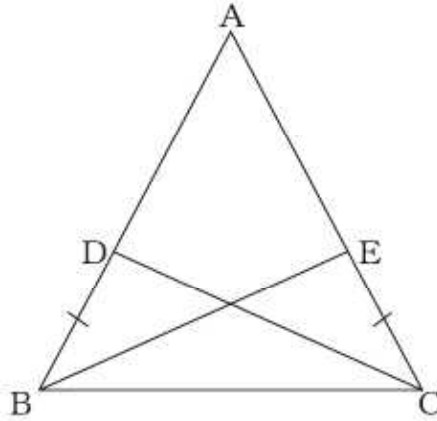
ウ 上の証明から、すべての平行四辺形で、2組の向かい合う辺はそれぞれ等しいことが分かる。

エ 上の証明から、台形の2組の向かい合う辺はそれぞれ等しいことも分かる。

知識・技能の習得を図る問題 年 組 号 氏名

全国学力・学習状況調査 A問題

- 3 下の図のような $AB = AC$ の二等辺三角形 ABC があります。辺 AB , 辺 AC 上に $BD = CE$ となる点 D , 点 E をそれぞれとります。このとき, $CD = BE$ となることを, 次のように証明しました。【H19】



証明

$\triangle DBC$ と $\triangle ECB$ において,
 仮定から, $BD = CE$ ①
 $\triangle ABC$ は二等辺三角形なので底角は等しいから,
 $\angle DBC = \angle ECB$ ②
 また, $BC = CB$ (BC は共通) ③
 ①, ②, ③より, から,
 $\triangle DBC \equiv \triangle ECB$
 したがって, $CD = BE$

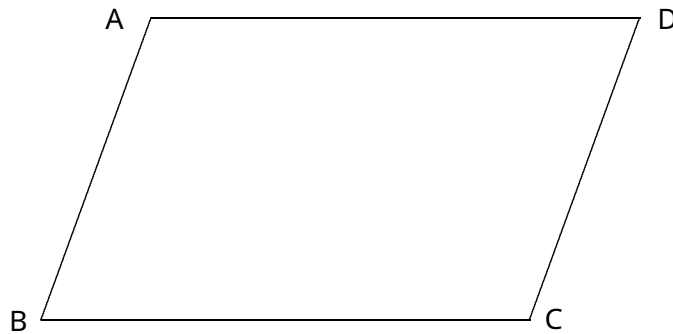
上の に当てはまる三角形の合同条件を, 下のアからオの中から1つ選びなさい。

- ア 3辺がそれぞれ等しい
- イ 2辺とその間の角がそれぞれ等しい
- ウ 1辺とその両端の角がそれぞれ等しい
- エ 直角三角形の斜辺と他の1辺がそれぞれ等しい
- オ 直角三角形の斜辺と1つの鋭角がそれぞれ等しい

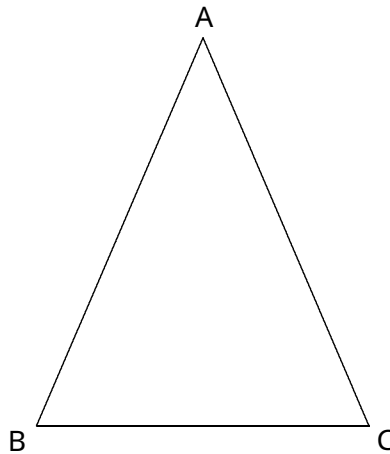
知識・技能の習得を図る問題 年 組 号 氏名

全国学力・学習状況調査 A問題

- 4 四角形は、1組の向かい合う辺が平行でその長さが等しいとき、平行四辺形になります。下線部を、下の図の四角形 $ABCD$ の辺と、記号 $//$ 、 $=$ を使って表しなさい。【H20】



- 5 次の図で、 ABC は $AB = AC$ の二等辺三角形です。【H21】



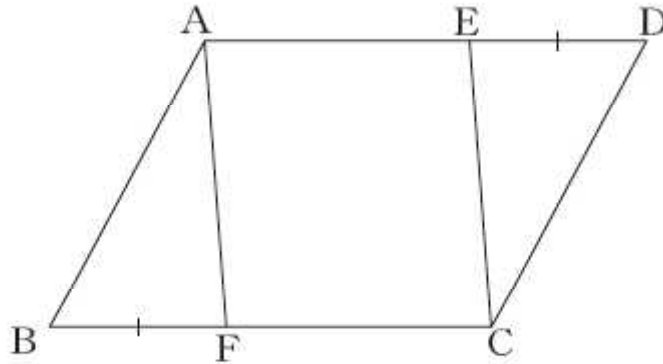
二等辺三角形の2つの底角は等しいといえます。下線部を、上の図の頂点を表す記号と、記号 $=$ を使って表しなさい。

知識・技能の習得を図る問題 年 組 号 氏名

全国学力・学習状況調査 A問題

- 5 平行四辺形 $ABCD$ の辺 AD , 辺 BC 上に, $DE = BF$ となるような点 E , 点 F をそれぞれとるとき, $AF = CE$ となることを, ある学級では, 下の図1をかいて証明しました。【H20】

図1



証明

$\triangle ABF$ と $\triangle CDE$ において

四角形 $ABCD$ は平行四辺形だから,

$$AB = CD \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$\angle ABF = \angle CDE \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

仮定から, $BF = DE \quad \dots\dots \textcircled{3}$

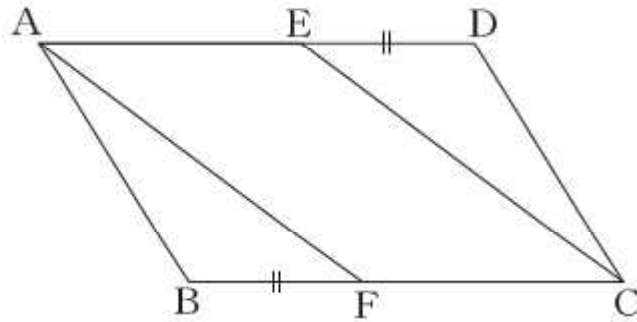
①, ②, ③より, 2辺とその間の角がそれぞれ等しいから,

$$\triangle ABF \equiv \triangle CDE$$

したがって, $AF = CE$

この証明のあと、図1と形の違う図2のような平行四辺形 $ABCD$ についても、同じように $AF = CE$ となるかどうかを考えてみたところ、下のアからエのような意見が出ました。正しいものを1つ選びなさい。

図2

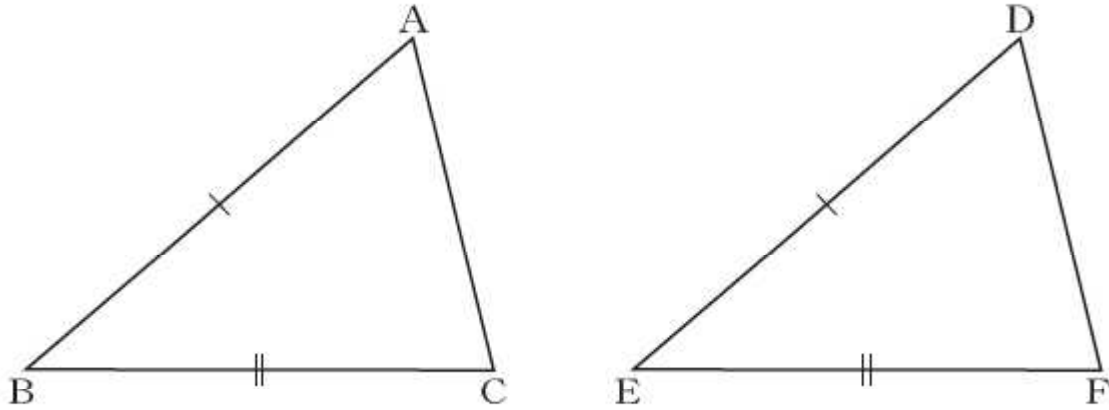


- ア 図2の場合も、 $AF = CE$ であることは、すでに前ページの証明で示されている。
- イ 図2の場合は、 $AF = CE$ であることを、改めて証明する必要がある。
- ウ 図2の場合は、 $AF = CE$ であることを、それぞれの長さを測って確認しなければならない。
- エ 図2の場合は、 $AF = CE$ ではない。

 知識・技能の習得を図る問題 年 組 号 氏名

全国学力・学習状況調査 A問題

7 次の図で， ABC と DEF が合同であることを証明しようとしています。 $AB = DE$ ， $BC = EF$ であることは分かっています。【H21】



三角形の合同条件を用いて証明するために，あと1つどのようなことが分かればよいですか。
 下の を完成しなさい。

・分かっていること

$$AB = DE$$

$$BC = EF$$

・分かればよいこと

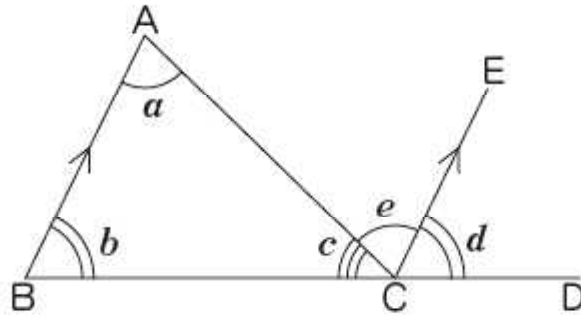
=

全国学力・学習状況調査 A問題

- 8 ある学級で、「三角形の内角の和は 180° である」ことの証明について、次の , を比べて考えています。【H21】

①

下の図の $\triangle ABC$ で、
 辺BCを延長した直線上の点をDとし、点Cを通り辺BA
 に平行な直線CEをひく。



平行線の錯角は等しいから、 $\angle a = \angle e$
 平行線の同位角は等しいから、 $\angle b = \angle d$
 したがって、

$$\begin{aligned} \angle a + \angle b + \angle c &= \angle e + \angle d + \angle c \\ &= 180^\circ \end{aligned}$$

よって、三角形の内角の和は 180° である。

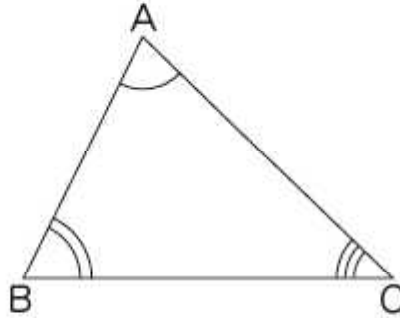
②

下の図の△ABCで、
3つの角の大きさをそれぞれ測ると、

$$\angle A = 72^\circ$$

$$\angle B = 64^\circ$$

$$\angle C = 44^\circ$$



したがって、

$$\begin{aligned} \angle A + \angle B + \angle C &= 72^\circ + 64^\circ + 44^\circ \\ &= 180^\circ \end{aligned}$$

よって、三角形の内角の和は 180° である。

どんな三角形でも内角の和は 180° であることの証明について、下のアからオまでの中から正しいものを1つ選びなさい。

ア も も証明できている。

イ は証明できており、 は形の違うたくさんの三角形で同じように確かめれば証明したことになる。

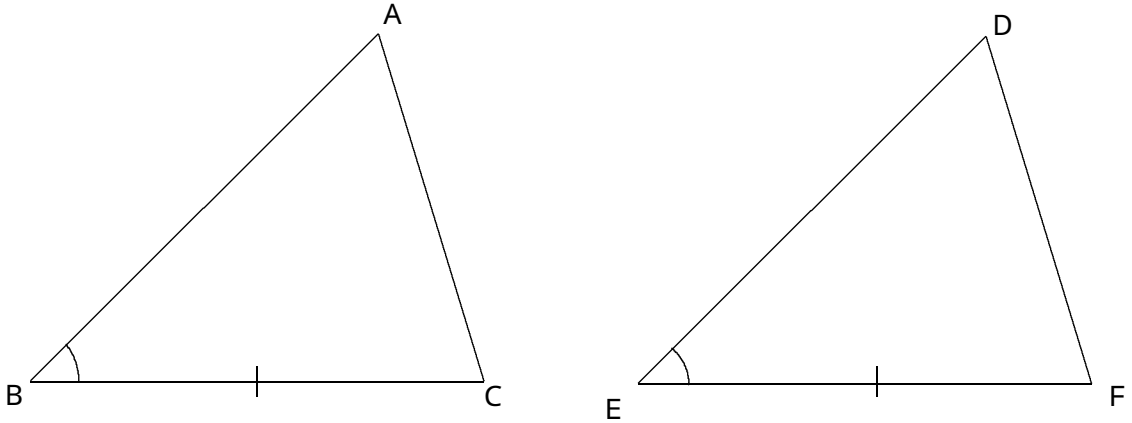
ウ は証明できているが、 は形の違うたくさんの三角形で同じように確かめても証明したことはない。

エ も も形の違うたくさんの三角形で同じように確かめれば証明したことになる。

オ は形の違うたくさんの三角形で同じように確かめれば証明したことになるが、 はそれでも証明したことはない。

練習問題

- 1 次の図で， $\triangle ABC$ と $\triangle DEF$ が合同であることを証明しようとしています。 $BC = EF$ ，
 $\angle B = \angle E$ であることは分かっています。



三角形の合同条件を用いて証明するために，あと1つどのようなことが分かればよいですか。
 下の = に分かればよいことを書きなさい。

・分かっていること

$$BC = EF$$

$$\angle B = \angle E$$

・分かればよいこと

=

練習問題

2 次の問いに答えなさい。

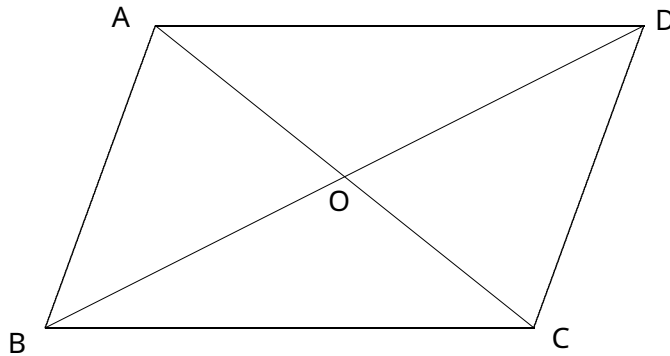
(1) 下の四角形 $ABCD$ は、2組の向かいあう辺がそれぞれ平行であるとき、平行四辺形になります。

下線部を、下の図の四角形 $ABCD$ の辺と、記号 $//$ を使って表すと、

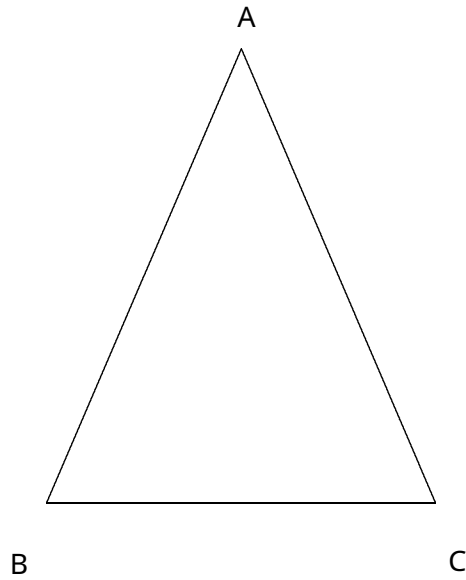
「 $AD//BC, AB//DC$ 」

となります。

この他にもあと4つ平行四辺形になるための条件があります。その4つの条件を記号 $//$, $=$ などを使って表しなさい。ただし、点 O は四角形の対角線 AC, BD の交点とします。



(2) 次の図で、 ABC は $AB = AC$ の二等辺三角形です。

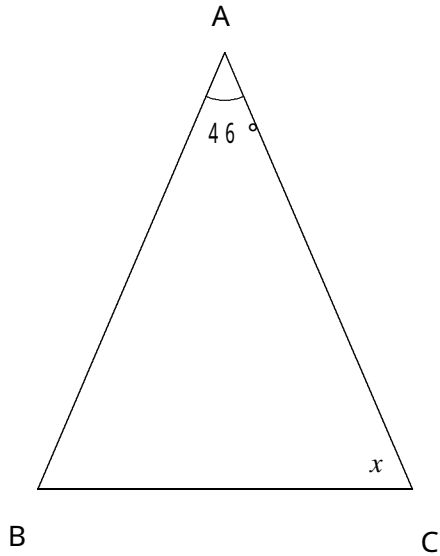


この二等辺三角形に、『 $AB = BC$ 』(または $AC = BC$)という条件が付け加われば正三角形になります。これ以外に、付け加えれば ABC が正三角形になる条件があります。その条件を記号で答えなさい。

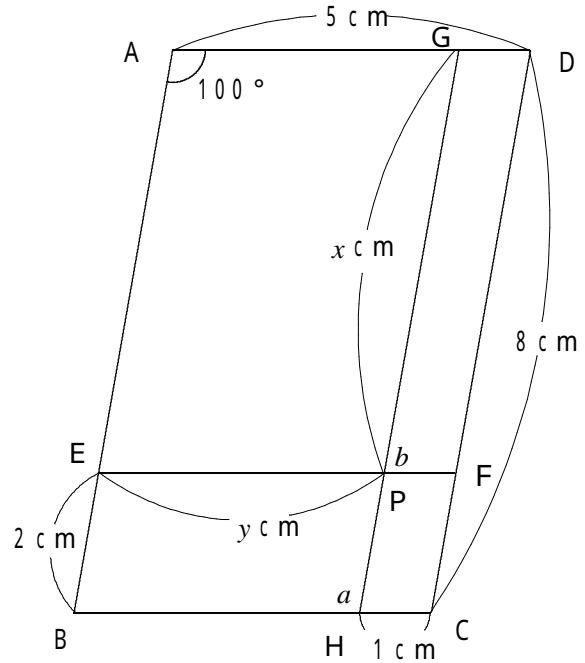
練習問題

3 次の角度や辺の長さを求めなさい。

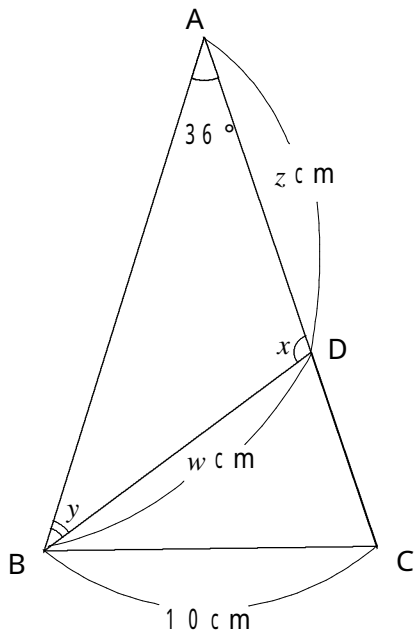
- (1) ABC が $AB = AC$ の二等辺三角形のとき、 x の大きさを求めなさい。



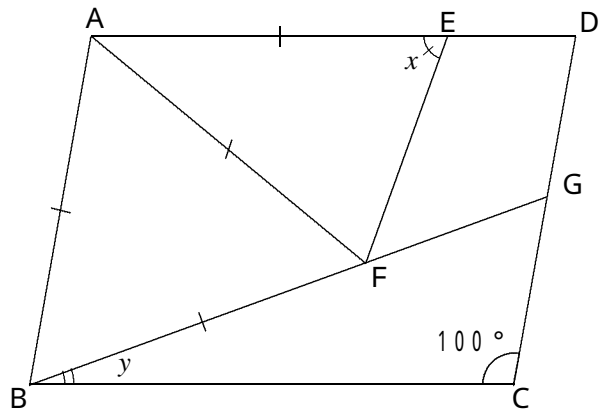
- (2) 四角形 $ABCD$ が平行四辺形で、 $AB \parallel GH$ 、 $AD \parallel EF$ のとき、 x, y の値と、 a, b の大きさをそれぞれ求めなさい。



- (3) ABC は $AB = AC$ の二等辺三角形です。 B の二等分線と辺 AC との交点を D とする。このとき、 w, z の値と、 x, y の大きさを、それぞれ求めなさい。



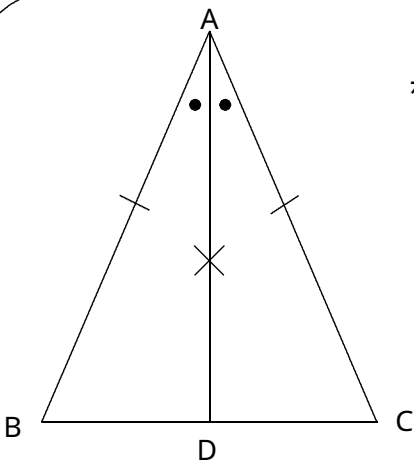
- (4) 四角形 $ABCD$ は $C = 100^\circ$ の平行四辺形で、 ABF は AB を1辺とする正三角形とする。辺 AD 上に $AF = AE$ となる点 E をとり、 BF の延長と辺 DC の交点を G とする。このとき、 x, y の大きさをそれぞれ求めなさい。



練習問題

- 4 「二等辺三角形の底角は等しい」ことを下のよう証明しました。あとの問いに答えなさい。

【証明】



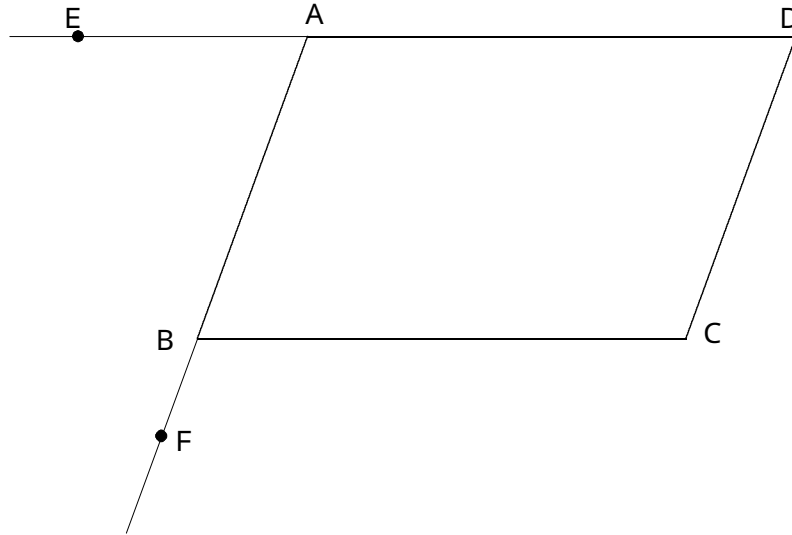
$AB = AC$ の二等辺三角形の、頂角の二等分線
 をひき、辺 BC との交点を D とする。
 ABD と ACD で、
 ABC は二等辺三角形だから、
 $AB = AC$
 AD は A の二等分線だから、
 $\angle BAD = \angle CAD$
 共通な辺だから、
 $AD = AD$
 , , より、
 () ので、
 $\triangle ABD \cong \triangle ACD$
 よって、[] から、
 $\angle B = \angle C$

- (1) () にあてはまる三角形の合同条件を答えなさい。
- (2) [] にあてはまる言葉を答えなさい。
- (3) $\triangle ABD$ と $\triangle ACD$ の合同から、 $\angle B = \angle C$ 以外のことも分かります。その分かることを下のアからエの中から1つ選びなさい。
- ア AD は BC を垂直に2等分する。
- イ $AB = AD$ になる。
- ウ $AB = BC = CA$ となり $\triangle ABC$ は正三角形になる。
- エ $AB = AC$ の二等辺三角形 $\triangle ABC$ でも、上の図と異なる場合は常に、 $\angle B = \angle C$ になるとは限らない。

練習問題

- 5 「平行四辺形の向かい合う角は等しい」ということを証明しました。あとの問いに答えなさい。

【証明】



上の図の $ABCD$ で、辺 DA の延長上に点 E をとり、辺 AB の延長上に点 F をとる。

$ABCD$ だから、 $AD \parallel BC$ 。よって、

$$\angle DAB = (\text{ア}) \dots\dots$$

また、 $AB \parallel DC$ より、

$$(\text{ア}) = \angle C \dots\dots$$

、より、

$$\angle DAB = \angle C \dots\dots$$

同様に、 $AD \parallel BC$ より、

$$\angle ABC = (\text{イ}) \dots\dots$$

また、 $AB \parallel DC$ より、

$$(\text{イ}) = \angle D \dots\dots$$

、より、

$$\angle ABC = \angle D \dots\dots$$

よって、より、平行四辺形の向かい合う角は等しい。

(1) (ア), (イ) にあてはまる記号をかきなさい。

(2) , , の根拠となることから下のアからエの中からそれぞれ1つずつ選びなさい。

ア 対頂角が等しいから

イ 同位角が等しいから

ウ 錯角が等しいから

エ 三角形の内角の和は 180° だから

(3) 平行四辺形の性質は、上で証明したことの他にもまだいくつかあります。平行四辺形の性質として正しいものを下のアからオの中から1つ選びなさい。

ア $A = B$, $C = D$ である。

イ $A + B = 180^\circ$, $C + D = 180^\circ$ である。

ウ 対角線が垂直に交わっている。

エ 対角線の長さが等しい。

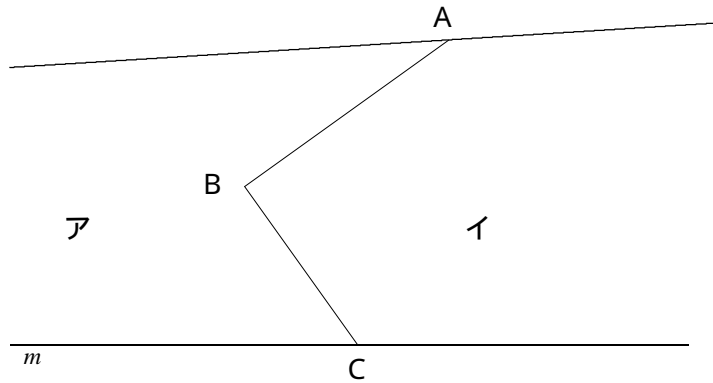
オ $AB = BC$, $AD = DC$ である。

練習問題

6 次の問いに答えなさい。

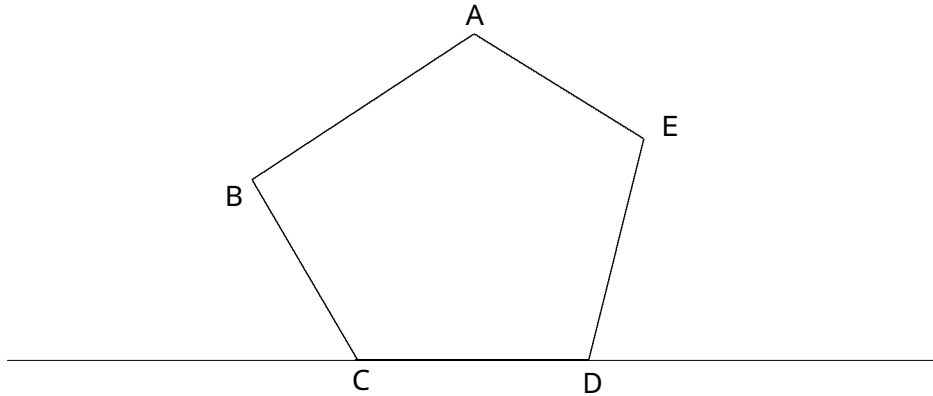
- (1) 下の図のように、直線 l と m の間にあり、折れ線 ABC を境界とする2つの土地ア、イがあります。それぞれの土地の面積を変えないで、境界を点 C を通る線分 CD に改めるとき、点 D の位置を作図により求めなさい。

ただし、点 D は直線 l 上にあるものとします。



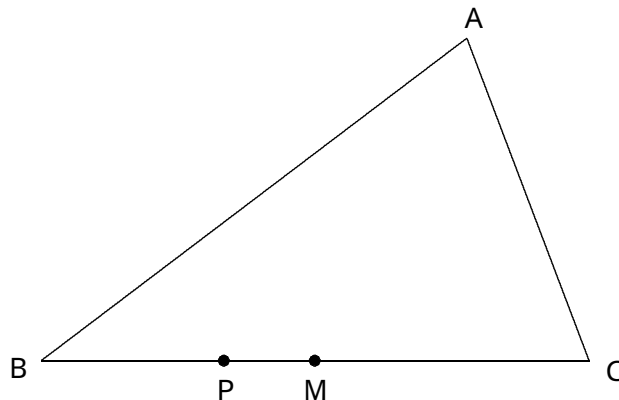
- (2) 次の五角形 $ABCDE$ と同じ面積の三角形 AFG を作図しなさい。

ただし、点 F, G は直線 CD 上にあるものとします。



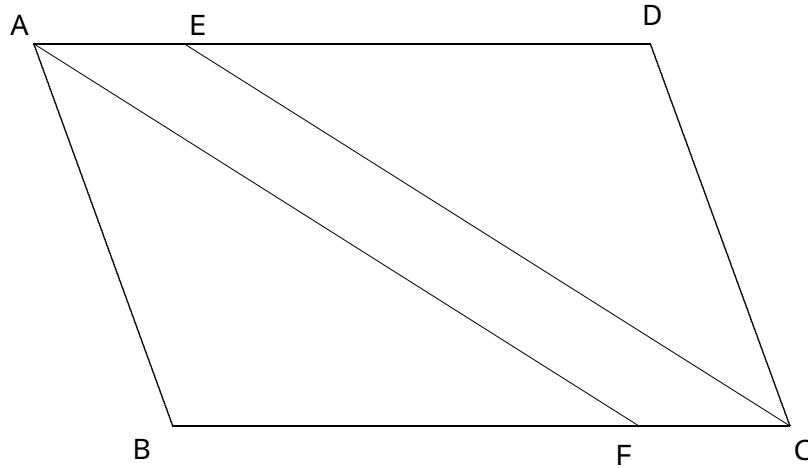
- (3) 次の三角形 ABC で、点 P を通り、三角形 ABC の面積を2等分する直線をかきなさい。

ただし、点 M は、 BC の中点とします。



練習問題

- 7 下の図のように、平行四辺形 $ABCD$ の辺 AD 、 BC 上に、 $AE = CF$ となる点 E 、 F をそれぞれとります。このときできる四角形 $AFCE$ が平行四辺形なることを証明しました。あとの問いに答えなさい。



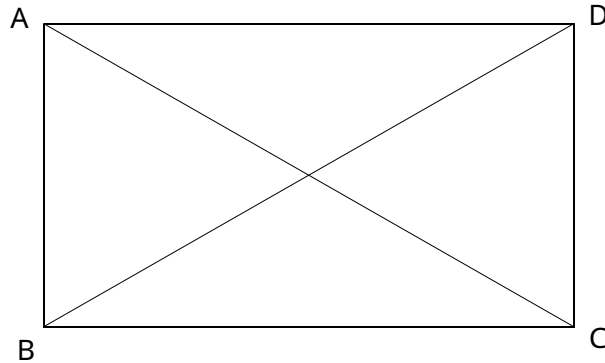
【証明】

四角形 $AFCE$ で、
 四角形 $ABCD$ が平行四辺形であることより、向かい合う辺はそれぞれ
 平行なので、
 (ア).....
 仮定から、
 (イ).....
 , から、
 (ウ)から
 四角形 $AFCE$ は平行四辺形になる。

上の証明の中で、ア、イにはあてはまる式を、ウには平行四辺形になるための条件を答えなさい。

練習問題

- 8 下の図の四角形ABCDで、卓也さんと紳太郎さんが証明を考えています。あとの問いに答えなさい。



卓也さんは、次のように、「四角形ABCDが長方形ならば $AC = BD$ である」ことを証明しました。

【証明】

ABCと DCBで、四角形ABCDが長方形であれば、

$$AB = (\quad)$$

$$\angle ABC = (\quad) = 90^\circ$$

共通な辺だから $BC = (\quad)$

よって、($\triangle ABC \cong \triangle DCB$) ので、

$$\triangle ABC \cong \triangle DCB$$

だから、

$$AC = BD$$

となる。

- (1) 上の から $\triangle ABC \cong \triangle DCB$ には記号を、 $AC = BD$ には合同条件を書きなさい。

紳太郎さんは、卓也さんが証明した「四角形ABCDが長方形ならばAC=BDである」ことの逆を証明しようとしていました。

(2) 上の のことがらの逆を答えなさい。

(3) (2)で答えた逆のことがらが、正しいか正しいとはいえないかを答えなさい。また、正しいとはいえない場合は、その例を1つ答えなさい。