

中学校数学科

2年生

5 図形の性質と証明

[解答]

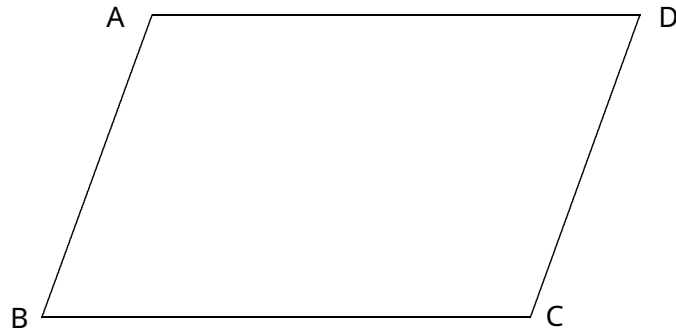
中学校

年 組 号 氏名

全国学力・学習状況調査 A問題

1

平行四辺形になるための5つの条件を理解しておく必要がある。



平行四辺形になるための5つの条件は次の通り。

- 2組の向かい合う辺がそれぞれ平行である。(定義)
- 2組の向かい合う辺がそれぞれ等しい。
- 2組の向かい合う角がそれぞれ等しい。
- 対角線がそれぞれの中点で交わる。
- 1組の向かい合う辺が平行で等しい。

「 $AB \parallel DC$, $AB = DC$ 」が表しているのは、1組の向かい合う辺が平行でその長さが等しいことを表している。

答え オ

全国学力・学習状況調査 A問題

2

証明

平行四辺形ABCDの対角線ACをひく。

$\triangle ABC$ と $\triangle CDA$ において、

平行線の錯角は等しいから、

AB//DCより、

$$\angle BAC = \angle DCA \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

AD//BCより、

$$\angle BCA = \angle DAC \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

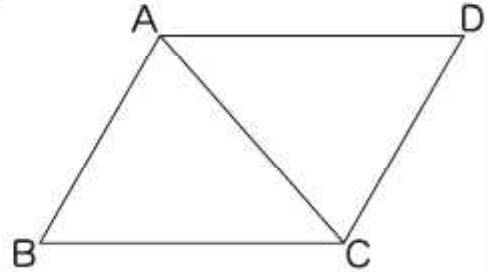
また、 $AC = CA$ (ACは共通) $\dots\dots \textcircled{3}$

①, ②, ③より、1辺とその両端の角がそれぞれ等しいから、

$$\triangle ABC \equiv \triangle CDA$$

よって、 $AB = CD$, $BC = DA$

したがって、平行四辺形の2組の向かい合う辺はそれぞれ等しい。

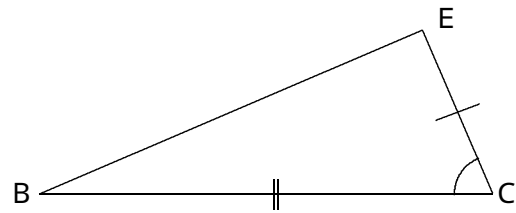
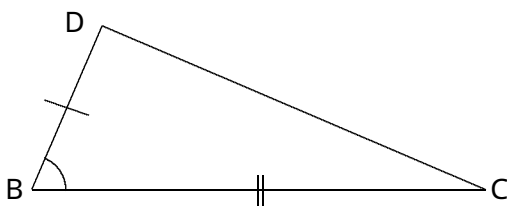


この証明は、どんな平行四辺形であっても同じように適用できる。

答え ウ

全国学力・学習状況調査 A問題

3 2つの三角形を抜き出して考えてみる。



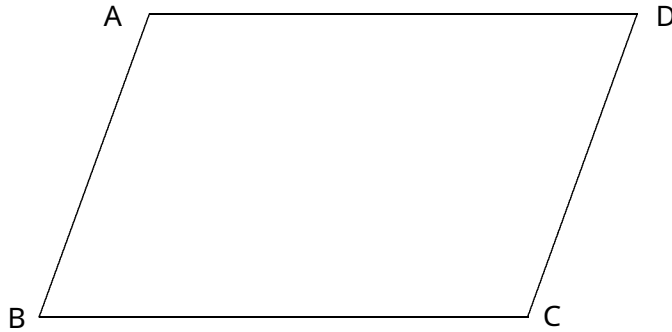
△DBCと△ECBにおいて、
 仮定から、 $BD = CE$ ①
 △ABCは二等辺三角形なので底角は等しいから、
 $\angle DBC = \angle ECB$ ②
 また、 $BC = CB$ (BCは共通)③
 ①, ②, ③より、 から、
 $\triangle DBC \equiv \triangle ECB$
 したがって、 $CD = BE$

、 、 を図に表すと、合同条件が、2辺とその間の角がそれぞれ等しいことが分かる。

答え イ

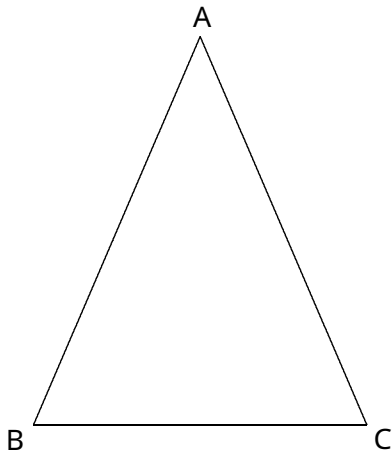
全国学力・学習状況調査 A問題

- 4 AD, BC の組と, AB, DC の組の2通りの場合があります。



答え $AB = DC, AB // DC$
 または,
 $AD = BC, AD // BC$

- 5 二等辺三角形の2つの底角は等しいことを記号で表す。この図形の場合は $AB = AC$ の二等辺三角形だから, 底角は B と C になる。



答え $B = C$
 または,
 $ABC = ACB$ など

全国学力・学習状況調査 A問題

6

図 1

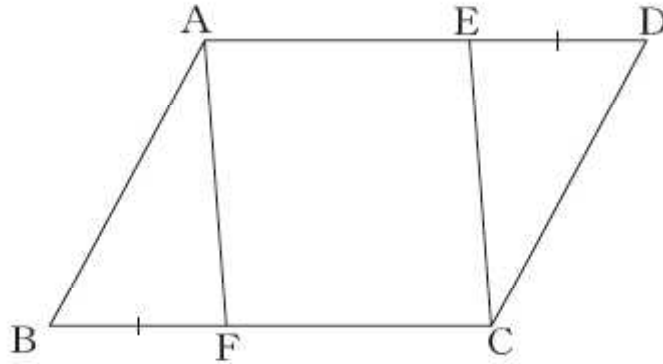


図 2

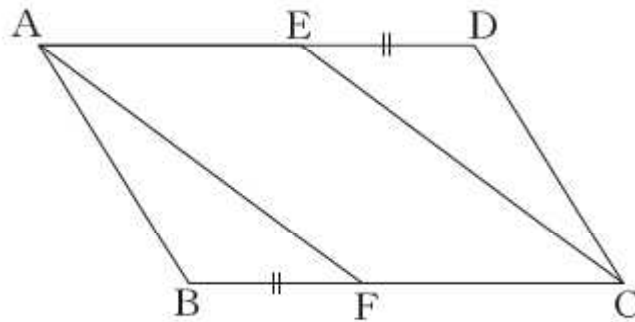
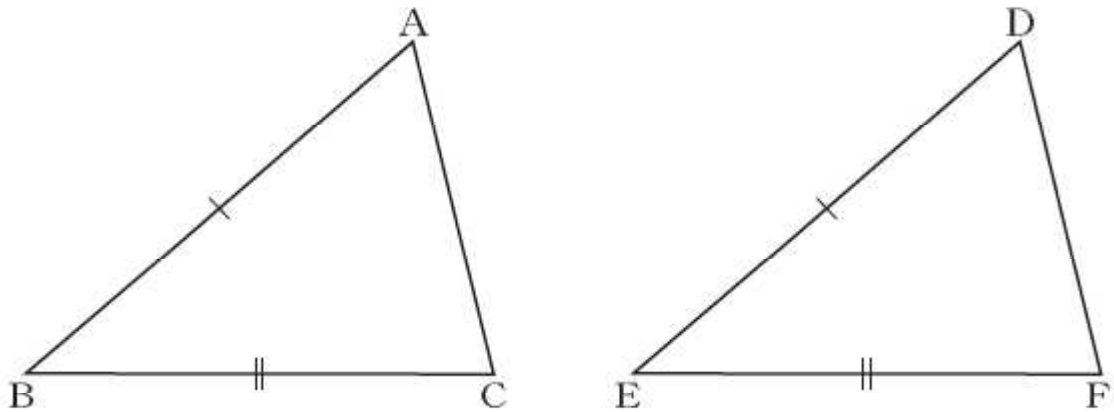


図 1 でも図 2 でも、同じように証明することができ、証明の一般性は失われない。

答え ア

全国学力・学習状況調査 A問題

7



・分かっていること

$$AB = DE$$

$$BC = EF$$

・分かればよいこと

=

2 辺が等しいことが分かっているので、あとは間の角が等しいか、または、残りの辺が等しいことがいえればよい。

答え $\angle B = \angle E$ ($\triangle ABC = \triangle DEF$)

または、

$$AC = DF$$

全国学力・学習状況調査 A問題

8

どんな三角形でも内角の和は 180° であることの証明になっているかが問われている問題である。

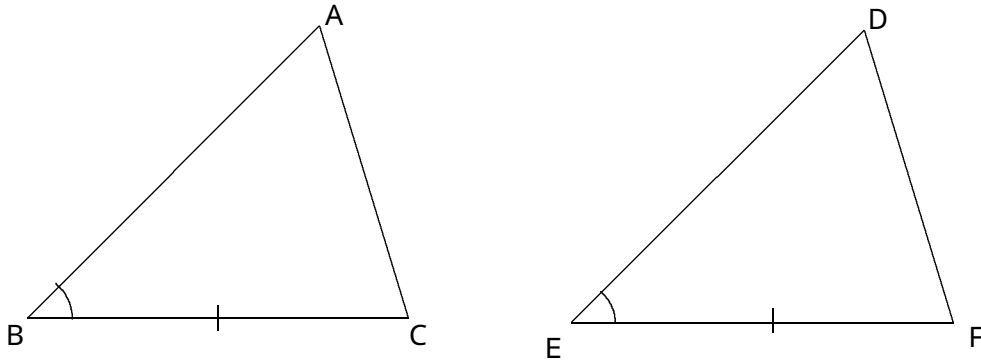
は一般性が保たれており、どんな三角形でも内角の和は 180° ということが証明できている。

しかし、 の場合は、与えられた図の場合では成り立っているが、その他の三角形の1つ1つを検証しなければならないので、これは「どんな三角形でも内角の和は 180° であることの証明」にはなっていない。

答え ウ

練習問題

1



$BC = EF$, $\angle B = \angle E$ であることは分かっているので、あと1つ分かれば合同がいえる。

$AB = DE$ ならば、2辺とその間の角がそれぞれ等しいから合同がいえる。

$\angle C = \angle F$ ならば、1辺とその両端の角がそれぞれ等しいから合同がいえる。

答え $AB = DE$

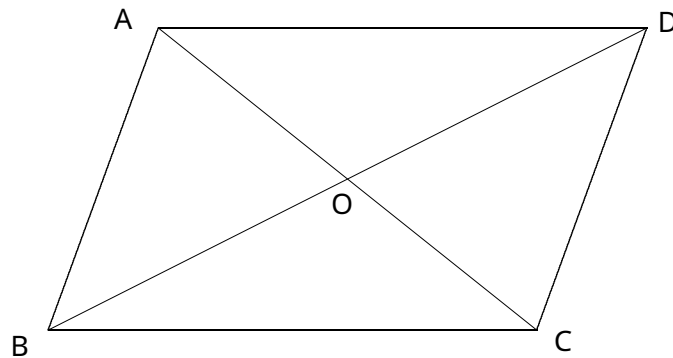
または

$\angle C = \angle F$ ($\angle ACB = \angle DFE$)

練習問題

2

(1)



平行四辺形になるための条件は次の5つ。(矢印の右側は、記号で表したもの)

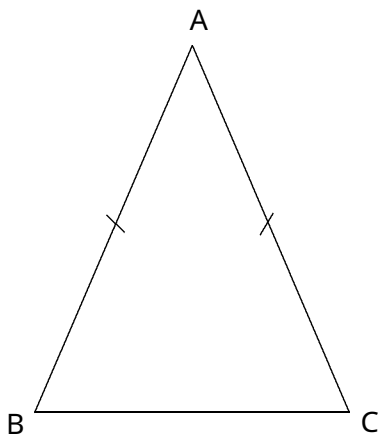
- | | |
|-----------------------|--|
| 2組の向かい合う辺がそれぞれ平行(定義)。 | 「 $AB \parallel DC, AD \parallel BC$ 」 |
| 2組の向かい合う辺がそれぞれ等しい。 | 「 $AB = DC, AD = BC$ 」 |
| 2組の向かい合う角がそれぞれ等しい。 | 「 $\angle BAD = \angle DCB,$
$\angle ABC = \angle CDA$ 」 |
| 対角線がそれぞれの中点で交わる。 | 「 $AO = CO, BO = DO$ 」 |
| 1組の向かい合う辺が等しくて平行。 | 「 $AB = DC, AB \parallel DC$ 」または、
「 $AD = BC, AD \parallel BC$ 」 |

答え

- $AB = DC, AD = BC$
- $\angle BAD = \angle DCB, \angle ABC = \angle CDA$
- $AO = CO, BO = DO$
- $AB = DC, AB \parallel DC$

または、
 $AD = BC, AD \parallel BC$

(2)



二等辺三角形だから、底角は等しい。
よって、

$$\angle B = \angle C$$

これに、 $\angle A$ が等しいことがいえれば、 $\triangle ABC$ は、
正三角形になる。

答え $\angle A = \angle B$
または、
 $\angle A = \angle C$

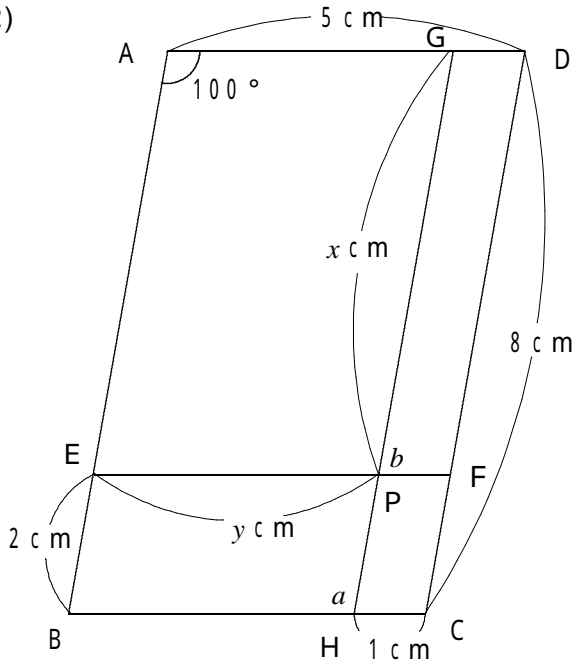
練習問題

3

$$(1) \quad x = (180^\circ - 46^\circ) \div 2 \\ = 67^\circ$$

答え $x = 67^\circ$

(2)



ABCDで、与えられた条件から、中に
できる四角形はすべて平行四辺形である。
よって、平行四辺形の性質から、

$$x = 8 - 2 = 6$$

$$y = 5 - 1 = 4$$

となる。また、

$$a = \angle A = 100^\circ$$

$$b = 180^\circ - \angle GPE$$

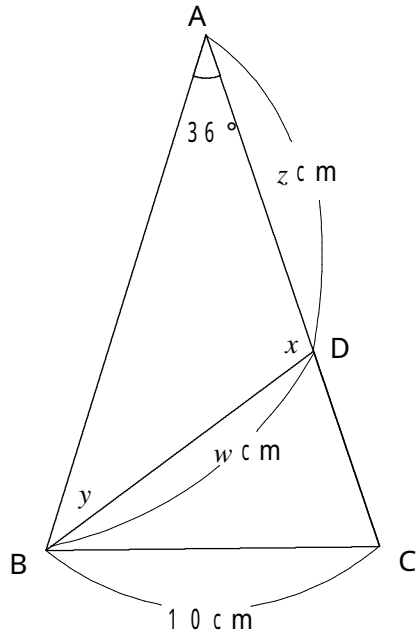
$$= 180^\circ - \angle A$$

$$= 180^\circ - 100^\circ$$

$$= 80^\circ$$

答え $x = 6 \text{ cm}$, $y = 4 \text{ cm}$
 $a = 100^\circ$, $b = 80^\circ$

(3)



ABCは二等辺三角形だから、

$$\begin{aligned} B &= C \\ &= (180^\circ - 36^\circ) \div 2 \\ &= 72^\circ \end{aligned}$$

また、DBCはBの半分だから、

$$\begin{aligned} y &= DBC \\ &= 72^\circ \div 2 \\ &= 36^\circ \\ y &= 36^\circ \end{aligned}$$

一方、

$$\begin{aligned} CDB &= 180^\circ - C - DBC \\ &= 180^\circ - 72^\circ - 36^\circ \\ &= 72^\circ \end{aligned}$$

よって、BDCも底角が 72° の二等辺三角形になる。

したがって、

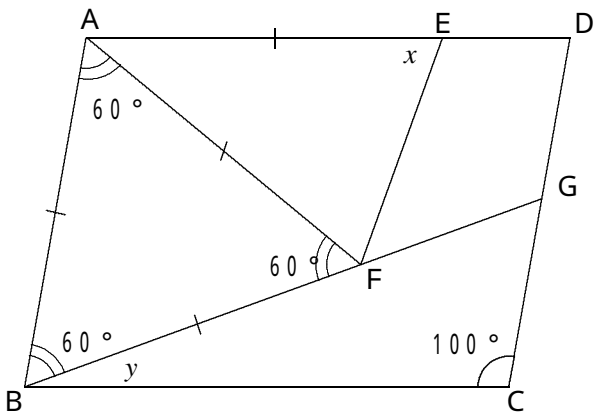
$$\begin{aligned} BC &= BD \\ &= 10 \text{ cm} \end{aligned}$$

また、ABDも二等辺三角形になる。このことから、角度や辺の長さが求められる。

$$\begin{aligned} AD &= BD \\ x &= 180^\circ - 36^\circ \times 2 \\ &= 108^\circ \end{aligned}$$

答え $x = 108^\circ$, $y = 36^\circ$
 $w = z = 10 \text{ cm}$

(4)



四角形 ABCD は平行四辺形より、2 組の向かいあう角はそれぞれ等しいから、

$$\angle BAE = \angle C = 100^\circ$$

ABF は正三角形だから、

$$\begin{aligned} \angle EAF &= \angle BAE - 60^\circ \\ &= 100^\circ - 60^\circ \\ &= 40^\circ \end{aligned}$$

よって、

$$\begin{aligned} x &= (180^\circ - 40^\circ) \div 2 \\ &= 70^\circ \end{aligned}$$

また、

$$\angle BAD = \angle C = 100^\circ, \quad \angle ABC = \angle D,$$

四角形の内角の和は 360° だから、

$$\begin{aligned} \angle BAE + \angle ABC + \angle C + \angle D &= 360^\circ \\ 2 \times \angle ABC + 100^\circ + 100^\circ &= 360^\circ \end{aligned}$$

よって、

$$\angle ABC = 80^\circ$$

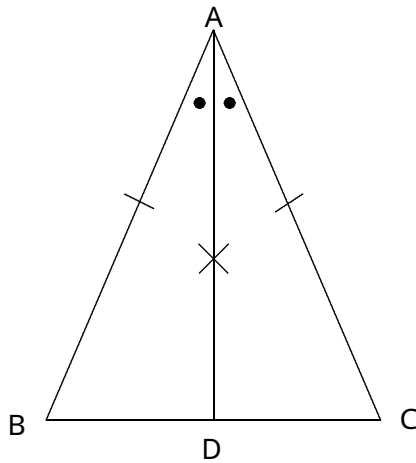
これから、

$$\begin{aligned} y &= 80^\circ - \angle ABF \\ &= 80^\circ - 60^\circ \\ &= 20^\circ \end{aligned}$$

答え $x = 70^\circ, \quad y = 20^\circ$

練習問題

4



$AB = AC$ の二等辺三角形の、頂角の二等分線をひき、辺 BC との交点を D とする。

ABD と ACD で、

ABC は二等辺三角形だから、

$$AB = AC \quad \dots\dots$$

AD は A の二等分線だから、

$$\angle BAD = \angle CAD \quad \dots\dots$$

共通な辺だから、

$$AD = AD \quad \dots\dots$$

, , より、

(2 辺とその間の角がそれぞれ等しい) ので、

$$\triangle ABD \cong \triangle ACD$$

よって、[合同な図形では対応する角の大きさは等しい] から、

$$\angle B = \angle C$$

(1) 上の証明を参考にするとよい。

答え 2 辺とその間の角がそれぞれ等しい

(2) 上の証明を参考にするとよい。

答え 合同な図形では対応する角の大きさは等しい

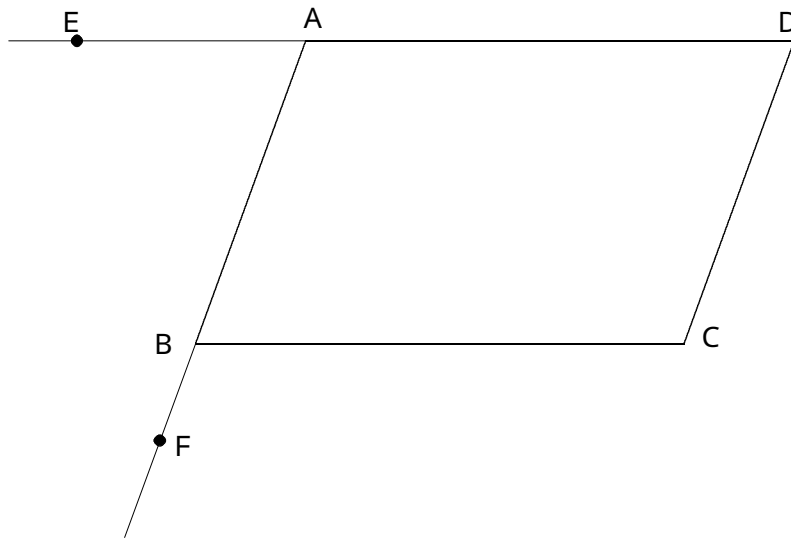
(3) 頂角の二等分線は、底辺を垂直に 2 等分する。

答え ア

練習問題

5

証明は次の通り。



上の図の $ABCD$ で、辺 DA の延長上に点 E をとり、辺 AB の延長上に点 F をとる。

$ABCD$ だから、 $AD \parallel BC$ 。よって、

$$\angle DAB = (\angle CBF) \dots\dots$$

また、 $AB \parallel DC$ より、

$$(\angle CBF) = \angle C \dots\dots$$

、より、

$$\angle DAB = \angle C \dots\dots$$

同様に、 $AD \parallel BC$ より、

$$\angle ABC = (\angle EAB) \dots\dots$$

また、 $AB \parallel DC$ より、

$$(\angle EAB) = \angle D \dots\dots$$

、より、

$$\angle ABC = \angle D \dots\dots$$

よって、より、平行四辺形の向かい合う角は等しい。

(1) 上の証明を参考に考えるとよい。

答え ア..... $\angle CBF$ (または, $\angle FBC$)
イ..... $\angle EAB$ (または, $\angle BAE$)

(2) 答えは次のとおり。

答えイ,ウ
.....ウ,イ

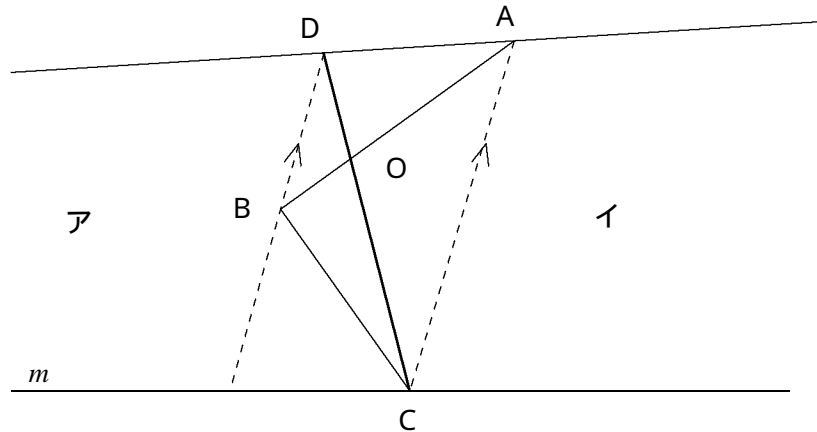
(3) 平行四辺形の性質は, イだけである。

答え イ

練習問題

6 解答は下のとおり。

(1)



線分ACをひく。

線分ACと平行で、点Bを通る直線をひく。

直線 と の直線の交点をDとすると、 $\triangle ABC$ と $\triangle ADC$ は底辺が共通で、高さが等しいので、 $\triangle ABC$ と $\triangle ADC$ の面積は等しい。

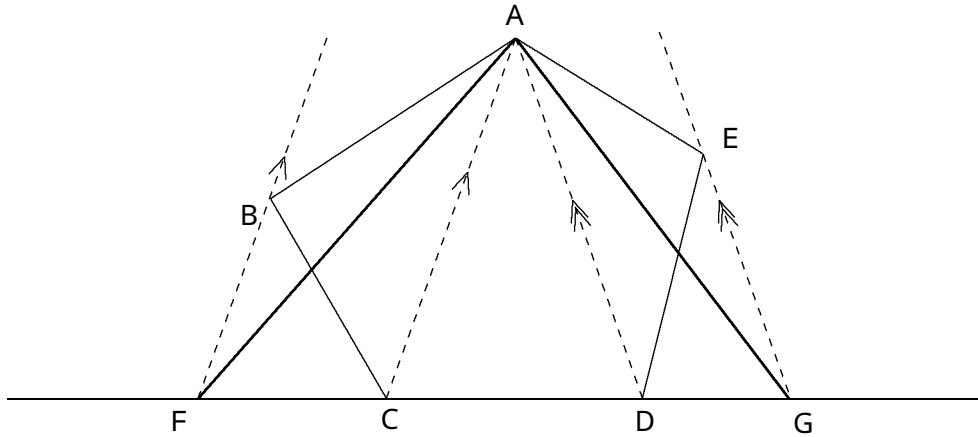
境界線をABからCDとすると、 $\triangle BOC$ がアの土地になるが、その代わり $\triangle DOA$ が新たにイの土地になる。よって、

$$\begin{aligned} \triangle ABC &= \triangle ADC \text{より、両辺から } \triangle AOC \text{ の面積をひくと、} \\ \triangle ABC - \triangle AOC &= \triangle ADC - \triangle AOC \\ \triangle BOC &= \triangle DOA \end{aligned}$$

となり、ア、イの面積は変わらない。

よって、線分CDが新しい境界になる。

(2)



線分ACをひく。

線分ACに平行で、点Bを通る直線をひき、直線CDとの交点を点Fとする。

ABCと AFCは、底辺(AC)が共通で、高さが等しいので、面積が等しい。

$$ABC = AFC$$

線分ADをひく。

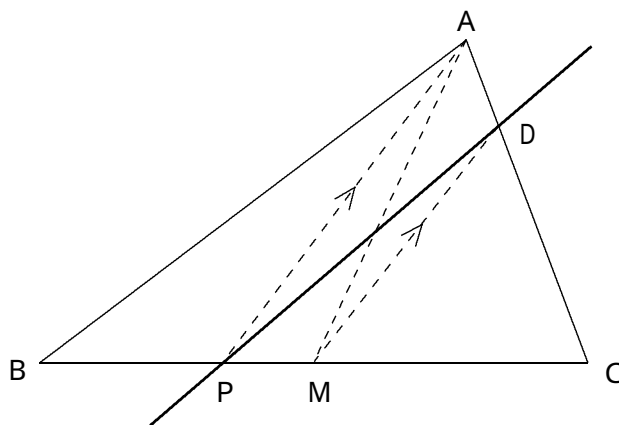
線分ADに平行で、点Eを通る直線をひき、直線CDとの交点を点Gとする。

AEDと AGDは、底辺(AD)が共通で、高さが等しいので、面積が等しい。

$$AED = AGD$$

$$\begin{aligned} \text{五角形ABCDE} &= ABC + ACD + AED \\ &= AFC + ACD + AGD \\ &= AFG \end{aligned}$$

(3)



線分AM, APをひく。

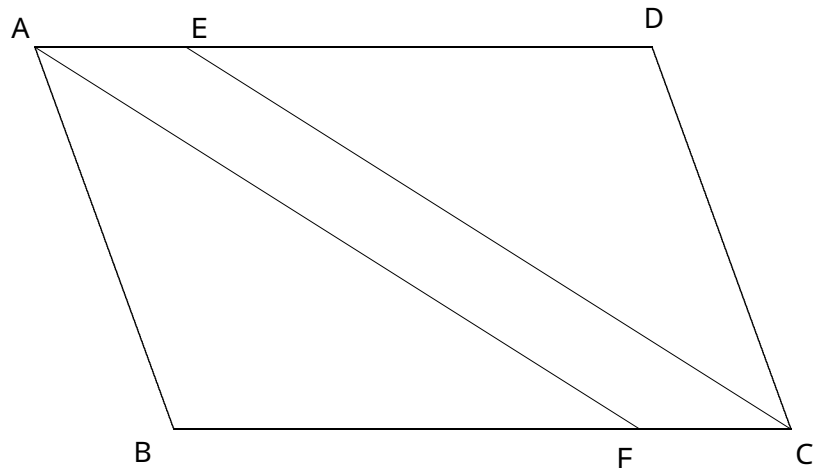
線分APと平行で点Mを通る直線をかき、ACとの交点をDとする。

AMはABCの面積の二等分線である。また、APMとAPDは、底辺(AP)が共通で、高さも等しいので面積は等しい。よって、 $APM = APD$ 。

よって、点Pと点Dを結ぶ直線がABCを点Pを分けて2等分する直線である。

練習問題

7 解答は下の通り。



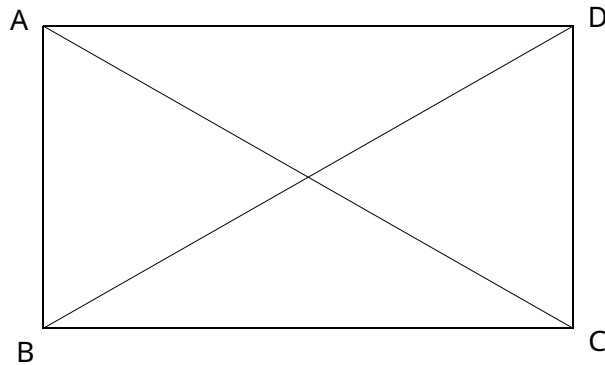
証明

四角形AFCEで、
 四角形ABCDが平行四辺形であることより、向かい合う辺はそれぞれ平行なので、
 (AE // CF)
 仮定から、
 (AE = CF)
 , から、
 (1組の向かい合う辺が等しくて平行) から
 四角形AFCEは平行四辺形になる。

答え ア.....AE//CF イ.....AE = CF
 ウ..... 1組の向かい合う辺が等しくて平行

練習問題

8



【証明】

ABCと DCBで、四角形ABCDが長方形であれば、

$$AB = (DC)$$

$$\angle ABC = (\angle DCB) = 90^\circ$$

共通な辺だから $BC = (CB)$

よって、(2辺とその間の角がそれぞれ等しい) ので、

$$\triangle ABC \cong \triangle DCB$$

だから、

$$AC = BD$$

となる。

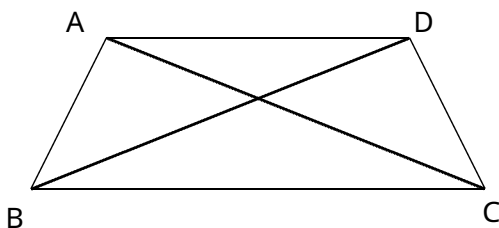
(1) 上の証明を参考にするとよい。

答え DC CB DCB
 2辺とその間の角がそれぞれ等しい

(2) 仮定と結論を入れかえるとよい。

答え AC = BDならば四角形ABCDは長方形である

(3) 四角形ABCDでAC = BDであったとしても、次のような台形が考えられる。



答え 正しくない。