問　関数 $f(x)=\dfrac{1}{(\cos x+1)(\sin x+1)}$ について，次の問いに答えよ．

(1) $0\leqq x\leqq\dfrac{\pi}{2}$ における関数 $f(x)$ の増減を調べ，$y=f(x)$ のグラフをかけ．ただし，変曲点は求めなくてよい．

(2) $t=\tan\dfrac{x}{2}$ とおくと，$\sin x=\dfrac{2t}{1+t^2}$，$\cos x=\dfrac{1-t^2}{1+t^2}$，$\dfrac{dx}{dt}=\dfrac{2}{1+t^2}$ が成り立つことを示せ．

(3) 曲線 $y=f(x)$ と，直線 $x=\dfrac{\pi}{2}$ および，x 軸，y 軸によって囲まれた図形の面積を求めよ．

（山口大）

解 (1) $f'(x) = -\dfrac{-\sin x(\sin x+1)+(\cos x+1)\cos x}{(\cos x+1)^2(\sin x+1)^2}$

商の導関数 $\left(\dfrac{f}{g}\right)'=\dfrac{f'g-fg'}{g^2}$

$$= \frac{\sin^2 x+\sin x-\cos x(\cos x+1)}{(\cos x+1)^2(\sin x+1)^2}$$

$$= \frac{(\sin x-\cos x)(\sin x+\cos x+1)}{(\cos x+1)^2(\sin x+1)^2}$$

三角関数の合成

$$= \frac{\sqrt{2}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\cdot\left\{\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)+1\right\}}{(\cos x+1)^2(\sin x+1)^2}$$

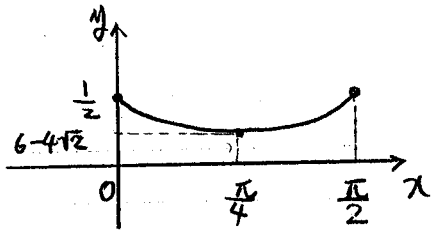
$0\leqq x\leqq\frac{\pi}{2}$ より　$\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)+1>0$ なので

増減表は

x	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{4}$	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$\frac{1}{2}$	↘	極小	↗	$\frac{1}{2}$

極小値は $f\left(\frac{\pi}{4}\right)=6-4\sqrt{2}$

グラフは　下図



(2) $1+\tan^2\theta = \dfrac{1}{\cos^2\theta}$ より $\cos^2\theta = \dfrac{1}{1+\tan^2\theta}$

$\theta = \dfrac{x}{2}$ とおくと $\cos^2\dfrac{x}{2} = \dfrac{1}{1+\tan^2\frac{x}{2}} = \dfrac{1}{1+t^2}$

$\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$ に $\sin\theta = \tan\theta\cdot\cos\theta$ を代入して

$= 2\tan\theta\cos^2\theta$

$\theta = \dfrac{x}{2}$ とおくと $\sin x = 2\tan\dfrac{x}{2}\cos^2\dfrac{x}{2}$

$= 2t\cdot\dfrac{1}{1+t^2} = \dfrac{2t}{1+t^2}$

また $\cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta$

$= 2\cos^2\theta - 1$

$\theta = \dfrac{x}{2}$ とおくと

$\cos x = 2\cos^2\dfrac{x}{2} - 1$

$= 2\cdot\dfrac{1}{1+t^2} - 1 = \dfrac{1-t^2}{1+t^2}$

また, $t = \tan\dfrac{x}{2}$ より $\dfrac{dt}{dx} = \dfrac{1}{\cos^2\frac{x}{2}}\cdot\dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{2\cos^2\frac{x}{2}}$

よって $\dfrac{dx}{dt} = 2\cos^2\dfrac{x}{2} = \dfrac{2}{1+t^2}$

(3)　(2) より $\dfrac{1}{(\cos x+1)(\sin x+1)}$

$$= \frac{1}{\left(\dfrac{1-t^2}{1+t^2}+1\right)\left(\dfrac{2t}{1+t^2}+1\right)} = \frac{(1+t^2)^2}{2(t+1)^2}$$ である.

また
x	$0 \to \frac{\pi}{2}$
t	$0 \to 1$

$\dfrac{dx}{dt} = \dfrac{2}{1+t^2}$ なので

$$S = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{(\cos x+1)(\sin x+1)}\,dx$$

$$= \int_0^1 \frac{(1+t^2)^2}{2(t+1)^2} \cdot \frac{2}{1+t^2}\,dt$$

$$= \int_0^1 \frac{1+t^2}{(t+1)^2}\,dt$$

$u = t+1$ とおくと
t	$0 \to 1$
u	$1 \to 2$

$\dfrac{du}{dt} = 1$ より

$$S = \int_1^2 \frac{1+(u-1)^2}{u^2}\,du$$

$$= \int_1^2 \frac{u^2-2u+2}{u^2}\,du$$

$$= \int_1^2 \left(1 - \frac{2}{u} + \frac{2}{u^2}\right)du$$

$$= \left[u - 2\log u - \frac{2}{u}\right]_1^2$$

$$= 2 - 2\log 2$$ ---- (答)

教科書とのつながり（公式等）

商の導関数 $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$

三角関数の合成 $a\sin\theta + b\cos\theta = \sqrt{a^2+b^2}\sin(\theta+\alpha)$

置換積分法

補充すべき内容

問題解決のための数学的な考え方

$t = \tan\frac{x}{2}$ とおいたとき $\sin x$ と $\cos x$ を t で表すこと。

これには三角比相互の関係

$$1+\tan^2\theta = \frac{1}{\cos^2\theta}$$

$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$ より $\sin\theta = \tan\theta\cos\theta$

$$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$$

倍角の公式

$$\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$$

$$\cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta$$

$$= 2\cos^2\theta - 1$$

を使いこなす必要がある。