問　次の問いに答えよ．

(1) 定積分 $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{\cos x} dx$ の値を求めよ．

(2) 極限値 $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} \frac{\log(n^2+2n+1)-\log n^2}{3\cos\frac{\pi}{3n}k}$ を求めよ．ただし，$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e$ （e は自然対数の底）であることを用いてよい．

（富山大）

解 (1) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{\cos x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\cos x}{\cos^2 x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\cos x}{1-\sin^2 x} dx$

頻出の定積分

$t=\sin x$ とおくと，$\frac{dt}{dx}=\cos x$ より $dx=\frac{dt}{\cos x}$

x	$0 \to \frac{\pi}{3}$
t	$0 \to \frac{\sqrt{3}}{2}$

$$与式 = \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{dt}{1-t^2} = \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{dt}{(1-t)(1+t)}$$

部分分数に分ける．

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \left(\frac{1}{1-t} + \frac{1}{1+t}\right) dt$$

$$= \frac{1}{2}\Big[-\log|1-t| + \log|1+t|\Big]_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

対数の性質

$$= \frac{1}{2}\left[\log\left|\frac{1+t}{1-t}\right|\right]_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

$$= \frac{1}{2}\log\left(\frac{1+\frac{\sqrt{3}}{2}}{1-\frac{\sqrt{3}}{2}}\right) = \frac{1}{2}\log\frac{2+\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}$$

$$= \frac{1}{2}\log\frac{(2+\sqrt{3})^2}{(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})}$$

$$= \frac{1}{2}\log(2+\sqrt{3})^2$$

$$= \log(2+\sqrt{3})$$

(2) $I_n = \sum_{k=1}^{n} \dfrac{\log(n^2+2n+1) - \log n^2}{3\cos\frac{\pi}{3n}k}$ とおくと

$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{\log(n+1)^2 - \log n^2}{3\cos\frac{\pi}{3n}k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\log\frac{(n+1)^2}{n^2}}{3\cos\frac{\pi}{3n}k}$$

$$= \log\left(1+\frac{1}{n}\right)^2 \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{3\cos\frac{\pi}{3n}k}$$

$$= n\cdot\frac{1}{n}\log\left(1+\frac{1}{n}\right)^2 \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{3\cos\frac{\pi}{3n}k}$$

$$= \frac{2}{3}\log\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \cdot \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\cos\frac{\pi}{3}\cdot\frac{k}{n}}$$

よって

$$\lim_{n\to\infty} I_n = \frac{2}{3}\cdot e\cdot\int_0^1 \frac{1}{\cos\frac{\pi}{3}x}\,dx$$

(1)の結果が使える置き換え

$\frac{\pi}{3}x = t$ とおくと $\frac{dt}{dx} = \frac{\pi}{3}$ より $dx = \frac{3}{\pi}dt$

x	$0 \to 1$
t	$0 \to \frac{\pi}{3}$

から

$$\lim_{n\to\infty} I_n = \frac{2}{3}e\cdot\frac{3}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{\cos t}\,dt$$

$$= \frac{2e}{\pi}\log(2+\sqrt{3})$$

教科書とのつながり（公式等）

置換積分法，区分求積法 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}f\left(\frac{k}{n}\right)=\int_0^1 f(x)\,dx$

$\displaystyle\int\frac{1}{x}dx=\log|x|+C$

極限 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e$

補充すべき内容

$\displaystyle\int\frac{1}{\cos x}dx=\int\frac{\cos x}{\cos^2 x}dx=\int\frac{\cos x}{1-\sin^2 x}dx$ と変形し，

$t=\sin x$ とおいて置換積分をする．

$\displaystyle\frac{1}{1-t^2}=\frac{1}{(1-t)(1+t)}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-t}+\frac{1}{1+t}\right)$

のように部分分数に分解する．

問題解決のための数学的な考え方

$\sin x=t$ とおく（置換積分法）

$\frac{\pi}{3}x=t$ とおく（　〃　）

置き換えをやってみることが大切．