問　曲線 $C_n: y=x^n(1-x)$ $(0\leqq x\leqq 1)$ について，次の問いに答えよ．ただし，nは2以上の整数とする．

(1) yの増減を調べて，C_nの概形をかけ．

(2) C_nとx軸とで囲まれた領域をD_nとするとき，D_nの面積S_nを求めよ．

(3) C_nのy座標が最大になる点のx座標をx_nとする．D_nの $x\leqq x_n$ である部分の面積T_nを求めよ．

(4)◆ 極限値 $\lim_{n\to\infty}\frac{T_n}{S_n}$ を求めよ．

(東京電機大)

解 (1) $y=x^n-x^{n+1}$ より

$$y'=nx^{n-1}-(n+1)x^n$$

$$=x^{n-1}\{n-(n+1)x\}$$

$=0$ とおくと，$x=0,\ \frac{n}{n+1}$

増減表は

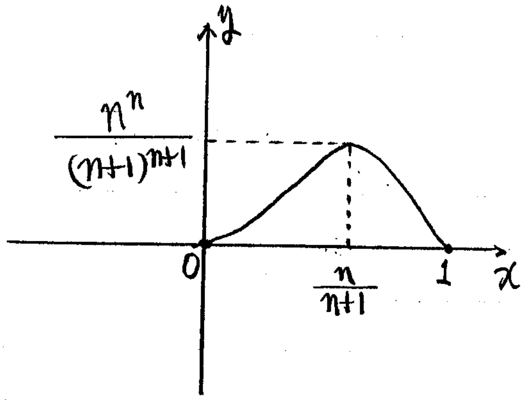
x	0	$\cdots$	$\frac{n}{n+1}$	$\cdots$	1
y'	0	$+$	0	$-$	
y	0	$\nearrow$		$\searrow$	0

極大値は $x=\frac{n}{n+1}$ のとき，$y=\left(\frac{n}{n+1}\right)^n\left(1-\frac{n}{n+1}\right)$

$$=\frac{n^n}{(n+1)^n}\cdot\frac{1}{n+1}$$

$$=\frac{n^n}{(n+1)^{n+1}}$$

よって曲線C_nの概形は下図．



(2) $S_n = \int_0^1 (x^n - x^{n+1})\,dx$

$= \left[\dfrac{x^{n+1}}{n+1} - \dfrac{x^{n+2}}{n+2}\right]_0^1 = \dfrac{1}{n+1} - \dfrac{1}{n+2} = \dfrac{1}{(n+1)(n+2)}$ …答)

(3) (1)より $x_n = \dfrac{n}{n+1}$ なので

$T_n = \int_0^{\frac{n}{n+1}} (x^n - x^{n+1})\,dx$

$= \left[\dfrac{x^{n+1}}{n+1} - \dfrac{x^{n+2}}{n+2}\right]_0^{\frac{n}{n+1}}$

$= \dfrac{1}{n+1}\cdot\left(\dfrac{n}{n+1}\right)^{n+1} - \dfrac{1}{n+2}\cdot\left(\dfrac{n}{n+1}\right)^{n+2}$

$= \dfrac{(n+2)\cdot n^{n+1} - n^{n+2}}{(n+1)^{n+2}(n+2)}$

$= \dfrac{2\cdot n^{n+1}}{(n+1)^{n+2}(n+2)}$ …答)

(4) $\dfrac{T_n}{S_n} = T_n \times \dfrac{1}{S_n} = \dfrac{2\cdot n^{n+1}}{(n+1)^{n+2}(n+2)} \times (n+1)(n+2)$

$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$ が使える形に変形する

$= \dfrac{2\cdot n^{n+1}}{(n+1)^{n+1}} = 2\left(\dfrac{n}{n+1}\right)^{n+1} = 2\left(\dfrac{n}{n+1}\right)\left(\dfrac{n}{n+1}\right)^n$

$= 2\left(\dfrac{1}{1+\frac{1}{n}}\right)\dfrac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}$

$n\to\infty$ のとき、$1+\dfrac{1}{n} \to 1$, $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n \to e$ なので

$\lim_{n\to\infty}\dfrac{T_n}{S_n} = \dfrac{2}{e}$ …答)

教科書とのつながり（公式等）

定積分と面積

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n} = e$$

補充すべき内容

問題解決のための数学的な考え方

指数の扱いがポイント

$$(n+2)\cdot n^{n+1} - n^{n+2}$$
$$= (n+2)\cdot n^{n+1} - n\cdot n^{n+1}$$
$$= 2\cdot n^{n+1}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^{n+1}}{(n+1)^{n+1}} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1}$$
$$= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n}$$
$$= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1+\frac{1}{n}}\right)\cdot\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}}$$
$$= 1\cdot\frac{1}{e}$$
$$= \frac{2}{e}$$