問　e を自然対数の底とし，$a \geqq e$ とする．曲線 $C_1 : y=a^x$ と曲線 $C_2 : y=\log_a x$ を考える．

(1) C_1 上の点 $(1,\ a)$ における C_1 の接線の方程式を求めよ．

(2) 点 P_1 が C_1 上を動き，点 P_2 が C_2 上を動くとき，2 点 P_1，P_2 間の距離 P_1P_2 の最小値 D を a を用いて表せ．

(3) (2)の D を最大とする a の値を求めよ．

(4) (1)で求めた接線の方程式を $y=g(x)$ とする．曲線 $y=a^x-g(x)$ と x 軸および y 軸で囲まれた図形を x 軸のまわりに 1 回転してできる立体を考える．a が(3)で求めた値のとき，この立体の体積 V を求めよ．

（徳島大）

解 (1) $y' = a^x \log a$ から 求める接線の方程式は

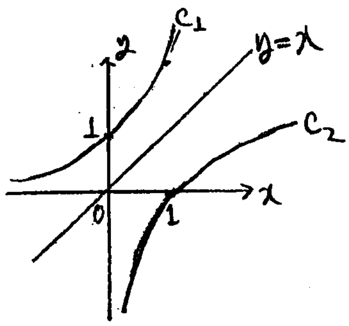
$$y - a = a\log a\,(x-1)$$

よって　$y = (a\log a)x - a\log a + a$ ‥‥ 答)

(2) 曲線 C_1 と C_2 は 逆関数なので 直線 $y=x$ に関して対称である．

逆関数の性質を利用

よって 点 P_1 と 直線 $y=x$ の最短距離を 2倍すれば D になる．



C_1 上の点 $P_1\,(x,\ a^x)$ と直線 $y=x$ との距離を $f(x)$ とすると，

点と直線の距離の公式

$$f(x) = \frac{|x - a^x|}{\sqrt{1^2+1^2}} = \frac{a^x - x}{\sqrt{2}}$$

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(a^x \log a - 1\right)$$

$= 0$ とおくと，

$$a^x = \frac{1}{\log a} \quad \text{より}$$

$$x = \log_a \frac{1}{\log a}$$

増減表は

x	$\cdots$	$\log_a \frac{1}{\log a}$	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$		$\nearrow$

より $f(x)$ は $x = \log_a \frac{1}{\log a}$ のとき最小になるから

$$D = 2 \cdot \frac{a^{\log_a \frac{1}{\log a}} - \log_a \frac{1}{\log a}}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}\left\{\frac{1}{\log a} + \log_a (\log a)\right\} \cdots \text{(答)}$$

(3) $D(a) = \sqrt{2}\left\{\frac{1}{\log a} + \log_a (\log a)\right\}$ $(a \geqq e)$ とおくと,

$$= \frac{\sqrt{2}\{\log(\log a) + 1\}}{\log a} \quad \text{より}$$

$$D'(a) = \frac{\sqrt{2}\left[\frac{1}{\log a} \cdot \frac{1}{a} \cdot \log a - \{\log(\log a) + 1\} \cdot \frac{1}{a}\right]}{(\log a)^2}$$

$$= \frac{-\sqrt{2}\log(\log a)}{a(\log a)^2}$$

$= 0$ とおくと $\log a = 1$ より $a = e$

増減表は

a	e	$\cdots$
$D'(a)$	0	$-$
$D(a)$	$\sqrt{2}$	$\searrow$

よって D を最大とする a の値は e $\cdots$ (答)

(4)　(3)より $a=e$ なので

(1)の接線 $g(x)=ex$

よって $y=a^x-g(x)$

$=e^x-ex$

$y'=e^x-e$

$=0$ とおくと $x=1$

増減表は

x	$\cdots$	1	$\cdots$
y'	$-$	0	$+$
y	$\searrow$	0	$\nearrow$

$0\leqq x\leqq 1$ で $y\geqq 0$ なので

$$V=\pi\int_0^1(e^x-ex)^2dx$$

$$=\pi\int_0^1(e^{2x}-2exe^x+e^2x^2)dx$$

$\int xe^x dx = xe^x-\int e^x dx = (x-1)e^x+C$ だから

（Cは積分定数）

$$V=\pi\left[\frac{e^{2x}}{2}-2e(x-1)e^x+\frac{e^2}{3}x^3\right]_0^1$$

$$=\left(\frac{5}{6}e^2-2e-\frac{1}{2}\right)\pi$$ ---答)

教科書とのつながり（公式等）

$(a^x)' = a^x \log a$

接線の方程式 $y - f(a) = f'(a)(x-a)$

商の導関数 $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$

補充すべき内容

点 (x_1, y_1) と直線 $ax + by + c = 0$ との距離は

$$\frac{|ax_1 + by_1 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

問題解決のための数学的な考え方

曲線 C_1 と C_2 は逆関数 ⇔ グラフは $y=x$ に関して対称

C_1 上の点 $P_1(x, a^x)$ と直線 $y=x$ との距離を2倍にすれば C_1 と C_2 の最短距離になる。