問　整数 n に対して，$I_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos x)^n\,dx$ とおく．次の問いに答えよ．

(1)　I_0，I_1，I_2 を求めよ．

(2)　I_n を I_{n-2} で表せ．ただし，$n\geqq 2$ とする．　（埼玉大）

解 (1)

$(\cos x)^0=1$

$$I_0=\int_0^{\frac{\pi}{2}}dx=\left[x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{2}$$

$$I_1=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x\,dx=\left[\sin x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=1$$

$$I_2=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 x\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1+\cos 2x}{2}\,dx$$

$$=\left[\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}\sin 2x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{4}$$

答)

(2)　$n\geqq 2$ のとき

$$I_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin x)'\cos^{n-1}x\,dx$$

部分積分法

$$=\left[\sin x\cos^{n-1}x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\cdot\left\{(n-1)\cos^{n-2}x\cdot(-\sin x)\right\}dx$$

$$=(n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 x\cos^{n-2}x\,dx$$

$$=(n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\cos^2 x)\cos^{n-2}x\,dx$$

$$=(n-1)\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{n-2}x\,dx-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n x\,dx\right)$$

$$=(n-1)I_{n-2}-(n-1)I_n$$

よって　$I_n=\dfrac{n-1}{n}I_{n-2}$　‥‥答)

教科書とのつながり（公式等）

半角の公式 $\cos^2\theta = \dfrac{1+\cos 2\theta}{2}$

部分積分法 $\displaystyle\int_a^b f g' dx = [fg]_a^b - \int_a^b f' g\, dx$

補充すべき内容

問題解決のための数学的な考え方

$\displaystyle I_n = \int_a^b (\cos x)^n dx$ や $\displaystyle I_n = \int_a^b (\sin x)^n dx$ は

部分積分法を用いて I_{n-2} との関係式（=漸化式）を作る。