問　整数 n に対して，$I_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos x)^n\,dx$ とおく．次の問いに答えよ．

(1) I_0, I_1, I_2 を求めよ．

(2) I_n を I_{n-2} で表せ．ただし，$n\geqq 2$ とする．　(埼玉大)

解 (1)

$(\cos x)^0=1$

$$I_0=\int_0^{\frac{\pi}{2}}dx=\Big[x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{2}$$

$$I_1=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x\,dx=\Big[\sin x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}=1$$

$$I_2=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 x\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1+\cos 2x}{2}\,dx$$

$$=\Big[\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}\sin 2x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{4}$$

…答)

(2) $n\geqq 2$ のとき

$$I_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin x)'\cos^{n-1}x\,dx$$

部分積分法

$$=\Big[\sin x\cos^{n-1}x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\cdot\{(n-1)\cos^{n-2}x\cdot(-\sin x)\}\,dx$$

$$=(n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 x\cos^{n-2}x\,dx$$

$$=(n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\cos^2 x)\cos^{n-2}x\,dx$$

$$=(n-1)\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{n-2}x\,dx-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n x\,dx\right)$$

$$=(n-1)I_{n-2}-(n-1)I_n$$

よって　$I_n=\dfrac{n-1}{n}I_{n-2}$　…答)

(3) (1)より $3\sin x + 4\cos x$

$$= 3\cdot\frac{2t}{1+t^2} + 4\cdot\frac{1-t^2}{1+t^2} = \frac{-4t^2+6t+4}{1+t^2}$$

$$= \frac{-2(2t^2-3t-2)}{1+t^2} = \frac{-2(2t+1)(t-2)}{1+t^2}$$

これと(2)より

$$与式 = \int \frac{5(1+t^2)}{-2(2t+1)(t-2)}\cdot\frac{2}{1+t^2}\,dt$$

$$= -\int \frac{5}{(2t+1)(t-2)}\,dt$$

部分分数に分ける

$$= -\int\left(\frac{-2}{2t+1} + \frac{1}{t-2}\right)dt$$

$$= \int\left(\frac{2}{2t+1} - \frac{1}{t-2}\right)dt$$

$$= \log|2t+1| - \log|t-2| + C$$ (Cは積分定数)

$$= \log\left|\frac{2t+1}{t-2}\right| + C$$

$$= \log\left|\frac{2\tan\frac{x}{2}+1}{\tan\frac{x}{2}-2}\right| + C$$

教科書とのつながり（公式等）

三角比相互の関係　$1+\tan^2\theta=\dfrac{1}{\cos^2\theta}$，$\tan\theta=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$

倍角の公式　$\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$

$$\cos 2\theta = \cos^2\theta-\sin^2\theta$$
$$=2\cos^2\theta-1$$

合成関数の導関数　$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{dy}{du}\cdot\dfrac{du}{dx}$

逆関数の導関数　$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1}{\frac{dx}{dy}}$

$\displaystyle\int\frac{1}{x}dx=\log|x|+C$（$C$は積分定数）…… Ⓐ

補充すべき内容

$t=\tan\dfrac{x}{2}$ とおいて，$\sin x$，$\cos x$ を t で表すには三角比相互の関係と倍角の公式を組み合わせれば解決できることを押さえておきたい。

問題解決のための数学的な考え方

$\displaystyle\int\frac{5}{(2t+1)(t-2)}dt$ のように，分母が1次式の積のときは，

$$\frac{a}{2t+1}+\frac{b}{t-2}=\frac{a(t-2)+b(2t+1)}{(2t+1)(t-2)}$$
$$=\frac{(a+2b)t-2a+b}{(2t+1)(t-2)}$$

として，$\begin{cases}a+2b=0\\-2a+b=5\end{cases}$ から $\begin{matrix}a=-2\\b=1\end{matrix}$

与式 $=\displaystyle\int\left(\frac{-2}{2t+1}+\frac{1}{t-2}\right)dt$ と変形し，Ⓐ を用いる。