問　2つの関数 $f(x)=\sqrt{\sin x}\,e^{-\frac{x}{2}}$，$g(x)=\sqrt{x}\,e^{-\frac{x}{2}}$ $(0\leqq x\leqq \pi)$ について，次の問いに答えよ．

(1) $x>\sin x$ $(0<x<\pi)$ を示せ．

(2) $0<x<\pi$ のとき，$f(x)$ の増減を調べ，極値 $f(a)$ を求めよ．

(3) 2つの曲線 $y=f(x)$，$y=g(x)$ と直線 $x=a$ とで囲まれた図形を x 軸のまわりに1回転してできる立体の体積を求めよ．ただし，a は(2)で求めた値とする．

（佐賀大）

解 (1) $h(x)=x-\sin x$ とおく

$h'(x)=1-\cos x$

$h(x)=$左辺$-$右辺 とおき，$h'(x)>0$ かつ $h(0)\geqq 0$ ならば $h(x)>0$

$0<x<\pi$ のとき $-1<\cos x<1$ より $1-\cos x>0$

よって $h'(x)>0$ より $h(x)$ は単調増加である．

$h(0)=0$ より $0<x<\pi$ のとき $h(x)>0$

すなわち $x>\sin x$ $(0<x<\pi)$ である．

(2) $f(x)=\sqrt{\sin x}\,e^{-\frac{x}{2}}$ より

積の導関数 $(fg)'=f'g+fg'$

$$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{\sin x}}\cdot\cos x\cdot e^{-\frac{x}{2}}+\sqrt{\sin x}\cdot e^{-\frac{x}{2}}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)$$

$$=\frac{-e^{\frac{x}{2}}(\sin x-\cos x)}{2\sqrt{\sin x}}$$

三角関数の合成

$$=\frac{-\sqrt{2}\,e^{\frac{x}{2}}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}{2\sqrt{\sin x}}$$

$=0$ とおくと　$x=\frac{\pi}{4}$　$(0\leqq x\leqq\pi$ のとき$)$

増減表は

x	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{4}$	$\cdots$	π
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		$\nearrow$		$\searrow$	

よって $a=\frac{\pi}{4}$ のとき極大値をとり，

$$f\left(\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{\sin\frac{\pi}{4}}\,e^{-\frac{\pi}{8}}=\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{4}}e^{-\frac{\pi}{8}}\quad\text{―答}$$

(3) $f(0)=g(0)=0$ である．

$0 \leqq x \leqq \frac{\pi}{4}$ のとき

$$\{g(x)\}^2-\{f(x)\}^2 = xe^{-x}-\sin x\, e^{-x}$$
$$= (x-\sin x)e^{-x} \geqq 0 \quad (\because (1) より)$$

よって $\{g(x)\}^2 \geqq \{f(x)\}^2$

$g(x) \geqq 0$, $f(x) \geqq 0$ なので

$g(x) \geqq f(x)$ である．

$$V = \pi\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left[\{g(x)\}^2-\{f(x)\}^2\right]dx$$
$$= \pi\int_0^{\frac{\pi}{4}}(x-\sin x)e^{-x}dx$$
$$= \pi\int_0^{\frac{\pi}{4}}xe^{-x}dx - \pi\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin x\, e^{-x}dx \quad \cdots\cdots ①$$

$$\int xe^{-x}dx = \int x\cdot(-e^{-x})'dx$$
$$= x\cdot(-e^{-x}) - \int(-e^{-x})dx$$
$$= -xe^{-x} + \int e^{-x}dx$$
$$= -xe^{-x} - e^{-x} + C \quad (C は積分定数)$$
$$= -(x+1)e^{-x} + C$$ なので

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}}xe^{-x}dx = \left[-(x+1)e^{-x}\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = -\left(\frac{\pi}{4}+1\right)e^{-\frac{\pi}{4}} + 1 \quad \cdots ②$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin x \cdot e^{-x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin x \cdot (-e^{-x})' dx$$

$$= \left[-\sin x \cdot e^{-x}\right]_0^{\frac{\pi}{4}} - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos x \cdot (-e^{-x}) dx$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{2}} e^{-\frac{\pi}{4}} + \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos x \cdot e^{-x} dx$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{2}} e^{-\frac{\pi}{4}} + \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos x \cdot (-e^{-x})' dx$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{2}} e^{-\frac{\pi}{4}} - \left[\cos x \cdot e^{-x}\right]_0^{\frac{\pi}{4}} - \int_0^{\frac{\pi}{4}} (-\sin x) \cdot (-e^{-x}) dx$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{2}} e^{-\frac{\pi}{4}} - \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-\frac{\pi}{4}} + 1 - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin x \, e^{-x} dx$$ より

$$2\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin x \cdot e^{-x} dx = -\sqrt{2} e^{-\frac{\pi}{4}} + 1$$

よって $\displaystyle \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin x \cdot e^{-x} dx = -\frac{1}{\sqrt{2}} e^{-\frac{\pi}{4}} + \frac{1}{2}$ ⋯ ③

②, ③ を ① に代入して

$$V = \pi\left\{-\left(\frac{\pi}{4}+1\right)e^{-\frac{\pi}{4}} + 1\right\} - \pi\left(-\frac{1}{\sqrt{2}} e^{-\frac{\pi}{4}} + \frac{1}{2}\right)$$

$$= -\left(\frac{\pi}{4}+1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\pi e^{-\frac{\pi}{4}} + \frac{1}{2}\pi$$ ⋯ (答)

教科書とのつながり（公式等）

$f'(x) > 0 \iff f(x)$ は単調増加

積の導関数　$(fg)' = f'g + fg'$

部分積分法　$\int fg' = fg - \int f'g$

回転体の体積

補充すべき内容

三角関数の合成　$a\sin\theta + b\cos\theta = \sqrt{a^2+b^2}\sin(\theta+\alpha)$

$\int \sin x \cdot e^{-x}\,dx$ は部分積分法を繰り返し（2回）行なう。