問　$f(x)=x^3-3x-5$ とするとき，つぎの問いに答えよ．

(1) 方程式 $f(x)=0$ はただ一つの実数解をもつことを示せ．さらに，この実数解を α とするとき，$2<\alpha<3$ をみたすことを示せ．

(2) $\alpha<t\leqq 3$ とし，点 $(t,\ f(t))$ における曲線 $y=f(x)$ の接線と x 軸の交点を $(s,\ 0)$ とするとき，$0<s-\alpha<\frac{1}{3}(t-\alpha)$ が成り立つことを示せ．

(3) $t_1=3$ とする．点 $(t_n,\ f(t_n))$ における曲線 $y=f(x)$ の接線と x 軸との交点を $(t_{n+1},\ 0)$ とする．このように数列 $\{t_n\}$ を定めるとき，$\lim_{n\to\infty} t_n=\alpha$ が成り立つことを示せ．　（大分大）

解 (1) $f'(x) = 3x^2-3$

$= 3(x+1)(x-1)$

増減表は

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	-3	$\searrow$	-7	$\nearrow$

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$, $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$

中間値の定理

よって $x>1$ において 関数 $y=f(x)$ は x軸と 一点で交わるので

方程式 $f(x)=0$ は ただ一つの 実数解をもつ

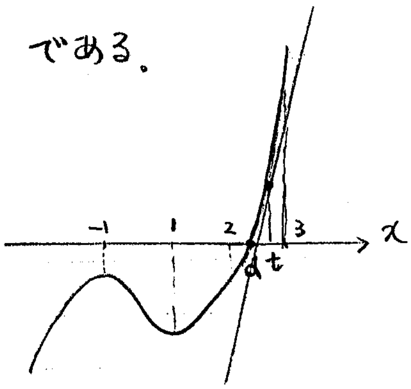
また，この実数解を α とすると，

$f(2) = -3 < 0$ ， $f(3) = 13 > 0$ なので

$f(\alpha)=0$ となる α は $2<\alpha<3$ である。

(2) 接線の方程式は

$y-(t^3-3t-5)=(3t^2-3)(x-t)$ より



$y = (3t^2-3)x - 2t^3-5$

$y=0$ とおいたときの x が s なので

$s = \dfrac{2t^3+5}{3t^2-3}$

よって

$$S-\alpha = \frac{2t^3+5}{3t^2-3} - \alpha = \frac{2t^3+5-3\alpha t^2+3\alpha}{3t^2-3}$$

$$= \frac{2t^3-3\alpha t^2+3\alpha+5}{3t^2-3}$$

$f(\alpha) = \alpha^3-3\alpha-5=0$ より $3\alpha+5=\alpha^3$ を代入して

$$= \frac{2t^3-3\alpha t^2+\alpha^3}{3t^2-3} \quad \cdots ①$$

$2<\alpha<3$ と $\alpha<t\leqq 3$ より ①の分母 $=3t^2-3>0$

①の分子 $= 2t^3-3\alpha t^2+\alpha^3 = (t-\alpha)(2t^2-\alpha t-\alpha^2)$

$= (t-\alpha)^2(2t+\alpha) > 0$

なので ①より $S-\alpha>0$

次に

$$\frac{1}{3}(t-\alpha)-(S-\alpha) = \frac{1}{3}(t-\alpha) - \frac{(t-\alpha)^2(2t+\alpha)}{3t^2-3}$$

$$= \frac{(t-\alpha)(t^2-1)-(t-\alpha)^2(2t+\alpha)}{3(t^2-1)}$$

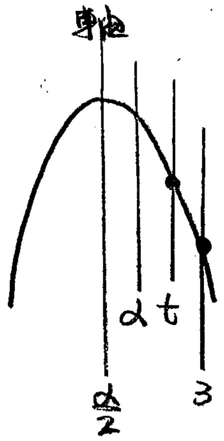
$$= \frac{(t-\alpha)(-t^2+\alpha t+\alpha^2-1)}{3(t^2-1)} \quad \cdots ②$$

②において 分母 $=3t^2-3>0$, $t-\alpha>0$,

$g(t) = -t^2+\alpha t+\alpha^2-1$ とおくと,

$$= -\left(t-\frac{\alpha}{2}\right)^2+\frac{5}{4}\alpha^2-1$$

また, $\frac{\alpha}{2}<\alpha<t\leqq 3$ と右図より



$g(t) \geqq g(3)$

すなわち $-t^2+\alpha t+\alpha^2-1 \geqq -3^2+3\alpha+\alpha^2-1$

$= \alpha^2+3\alpha-10$

$= (\alpha+5)(\alpha-2)$

$2<\alpha<3$ より $(\alpha+5)(\alpha-2)>0$

よって $g(t)>0$

② より $\frac{1}{3}(t-\alpha)-(s-\alpha)>0$

$\therefore \quad 0 < s-\alpha < \frac{1}{3}(t-\alpha)$

(3) (2) より $t=t_n$ のとき $s=t_{n+1}$ なので

$0 < t_{n+1}-\alpha < \frac{1}{3}(t_n-\alpha)$

これより $t_n-\alpha>0$ --- ③

漸化式を用いた不等式の証明の考え方

また $t_{n+1}-\alpha < \frac{1}{3}(t_n-\alpha)$ より

$t_n-\alpha < \frac{1}{3}(t_{n-1}-\alpha)$

$< \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}(t_{n-2}-\alpha)$

$< \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}(t_{n-3}-\alpha)$

$< \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}(t_1-\alpha) = \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}(3-\alpha)$ --- ④

$\lim_{n\to\infty}\left\{\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}(3-\alpha)\right\}=0$ なので

③, ④ から はさみうちの原理より $\lim_{n\to\infty}(t_n-\alpha)=0$

すなわち $\lim_{n\to\infty} t_n = \alpha$

教科書とのつながり（公式等）

中間値の定理　関数$f(x)$が$a \leqq x \leqq b$で連続で$f(a) \cdot f(b) < 0$
ならば$f(x)=0$は$a<x<b$で少なくとも1つの解をもつ。

$f'(x) > 0 \Leftrightarrow f(x)$は単調増加

接線の方程式　$y - f(a) = f'(a)(x-a)$

補充すべき内容

はさみうちの原理

$f(x) \leqq h(x) \leqq g(x)$　かつ　$\lim_{x \to \infty} f(x) = \lim_{x \to \infty} g(x) = \alpha$

ならば　$\lim_{x \to \infty} h(x) = \alpha$

問題解決のための数学的な考え方

$$t_{n+1} - \alpha < \frac{1}{3}(t_n - \alpha)$$

$$\begin{aligned} t_n - \alpha &< \frac{1}{3}(t_{n-1} - \alpha) \\ &< \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3}(t_{n-2} - \alpha) \\ &< \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3}(t_{n-3} - \alpha) \\ &\cdots\cdots \\ &< \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}(t_1 - \alpha) \end{aligned}$$