

問  $xy$  平面において、曲線  $y = x \log \frac{x+1}{x^2+1}$  と  $x$  軸で囲まれる部分の面積を求めよ。(奈良学立医大)

置を挿入  
により記述  
が楽になる。  
真数条件

解]  $f(x) = \frac{x+1}{x^2+1}$  とおくと、 $y = x \log f(x)$  と表せる。

$f(x) > 0$  より  $x > -1$   
 また、 $0 < f(x) < 1$  のとき  $\log f(x) < 0$   
 $f(x) > 1$  のとき  $\log f(x) > 0$   
 だから  $y$  の符号は次の表のようになる。

$x$	$-1$	---	$0$	---	$1$	---
$\log f(x)$		-	$0$	+	$0$	-
$y$		+	$0$	+	$0$	-

また、 $\lim_{x \rightarrow -1+0} y = \infty$ ,  $\lim_{x \rightarrow \infty} y = -\infty$

より  $y$  と  $x$  軸で囲まれる部分は  $0 \leq x \leq 1$  の範囲にあるので  
 求める面積  $S'$  は、

$$S' = \int_0^1 x \log f(x) dx$$

$$= \left[ \frac{x^2}{2} \log f(x) \right]_0^1 - \int_0^1 \frac{x^2}{2} \cdot \frac{f'(x)}{f(x)} dx$$

$$\therefore f'(x) = \frac{x^2+1 - (x+1) \cdot 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{-x^2-2x+1}{(x^2+1)^2} \quad \text{より}$$

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{-x^2-2x+1}{(x^2+1)^2} \cdot \frac{x^2+1}{x+1} = \frac{-x^2-2x+1}{(x+1)(x^2+1)}$$

$$= \frac{1}{x+1} - \frac{2x}{x^2+1} \quad \text{だから}$$

$$S' = - \int_0^1 \frac{x^2}{2} \left( \frac{1}{x+1} - \frac{2x}{x^2+1} \right) dx$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^1 \left( \frac{2x^3}{x^2+1} - \frac{x^2}{x+1} \right) dx$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^1 \left( 2x - \frac{2x}{x^2+1} - x + 1 - \frac{1}{x+1} \right) dx$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2} \int_0^1 \left( x+1 - \frac{1}{x+1} - \frac{2x}{x^2+1} \right) dx \\ &= \frac{1}{2} \left[ \frac{x^2}{2} + x - \log(x+1) - \log(x^2+1) \right]_0^1 \\ &= \frac{1}{2} \left( \frac{3}{2} - 2 \log 2 \right) = \frac{3}{4} - \log 2 \quad \dots \left( \frac{10}{6} \right) \end{aligned}$$

教科書とのつながり (公式等)

$$\text{部分積分法} \quad \int_a^b f'g \, dx = [fg]_a^b - \int_a^b fg' \, dx$$

$$\int \frac{1}{x} \, dx = \log|x| + C \quad (C \text{ は積分定数})$$

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)} \, dx = \log|f(x)| + C \quad ( \quad )$$

補充すべき内容

$$(\log x)' = \frac{1}{x}, \quad \{\log f(x)\}' = \frac{f'(x)}{f(x)}$$

本問から学べる数学的な考え方

$$y = x \log \frac{x+1}{x^2+1} \quad \text{のままでも計算できるか、}$$

$$f(x) = \frac{x+1}{x^2+1} \quad \text{と置き換えることにより}$$

記述がラクになる。

複雑な式は置き換えてみるという方法を試してみれば途中までの記述が簡単になることがあるということを押さえておきたい。