問　2曲線 $C_1: y=2\sqrt{x-1}$，$C_2: y=\log(x-1)+2$ について，以下の問いに答えよ．ただし，対数は自然対数である．

(1)　C_1 と C_2 がただ1つの共有点をもつことを示せ．

(2)　C_1，C_2 および x 軸で囲まれる部分の面積を求めよ．　（室蘭工大）

解]　(1)　C_1 と C_2 の共有点（の x 座標）は，方程式 $2\sqrt{x-1}=\log(x-1)+2$ の実数解である．（ただし定義域は $x>1$ となる）

$2\sqrt{x-1}=\log(x-1)+2$ をそのまま解くのは無理。
そこで，左辺－右辺を $f(x)$ とおいて $f(x)$ の増減を調べる．

$f(x)=2\sqrt{x-1}-\log(x-1)-2$ とおくと，共有点の個数は関数 $y=f(x)$ と x 軸 $(y=0)$ との共有点の個数と一致する。

$$f'(x)=\frac{1}{\sqrt{x-1}}-\frac{1}{x-1}=\frac{x-1-\sqrt{x-1}}{\sqrt{x-1}\,(x-1)}$$

$=0$ とおくと　$x-1=\sqrt{x-1}$　より　2乗して

$$x^2-2x+1=x-1 \iff x^2-3x+2=0$$
$$(x-1)(x-2)=0$$

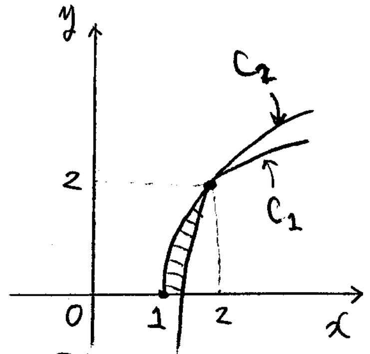
$x>1$ より　$x=2$

増減表は

x	1	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	╲	$-$	0	$+$
$f(x)$	╲	↘	0	↗

左の増減表より $f(x)=0$ は x 軸とただ1つの共有点をもつ
$\iff$ C_1 と C_2 の共有点は1つ

(2)　(1)より C_1，C_2 のグラフの概形は右図のようになる。C_2 と x 軸の共有点は
$\log(x-1)+2=0$ とおくと，
$x-1=e^{-2}$ より $x=1+\dfrac{1}{e^2}$ なので



$\int\sqrt{x-1}\,dx$
$\int\log(x-1)\,dx$
に注意

$$S=\int_1^2 2\sqrt{x-1}\,dx-\int_{1+\frac{1}{e^2}}^{2}\{\log(x-1)+2\}\,dx$$

$$=\left[\frac{4}{3}(x-1)^{\frac{3}{2}}\right]_1^2-\Big[(x-1)\log(x-1)-x+2x\Big]_{1+\frac{1}{e^2}}^{2}$$

$$=\frac{1}{3}-\frac{1}{e^2}\quad\cdots\text{(答)}$$

教科書とのつながり（公式等）

$(\log x)' = \dfrac{1}{x}$ ，部分積分法 $\int f g' = fg - \int f' g$

補充すべき内容

$(\sqrt{x})' = (x^{\frac{1}{2}})' = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\dfrac{1}{x^{\frac{1}{2}}} = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

であるが，頻出のため公式として扱っておく。

その際，積分と勘違いしないように指導する。

$(\sqrt{x})' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

$\int \sqrt{x}\,dx = \int x^{\frac{1}{2}}\,dx = \dfrac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + C = \frac{2}{3}x\sqrt{x} + C$ となる．

（Cは積分定数）

$\log_a y = x \iff y = a^x$

$\int \log(x+a)\,dx = (x+a)\log(x+a) - x + C$