

問

関数 $f(x) = (-2x+8)\sqrt{x-1}$ について、次の問に答えよ。

- (1) 曲線 $y=f(x)$ のグラフの概形をかけ。
- (2) x 軸と曲線 $y=f(x)$ で囲まれる図形の面積を求めよ。

(名城大)

解] (1) $f(x) = -2(x-4)(x-1)^{\frac{1}{2}} \quad (x \geq 1)$

$$f'(x) = -2(x-1)^{\frac{1}{2}} - (x-4)(x-1)^{-\frac{1}{2}}$$

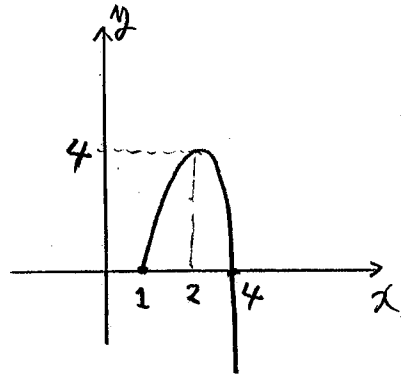
$$= -2\sqrt{x-1} - \frac{x-4}{\sqrt{x-1}} = \frac{-3(x-2)}{\sqrt{x-1}}$$

増減表は

x	1	...	2	...
$f'(x)$	↘	+	0	-
$f(x)$	0	↗	4	↘

また, $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = -\infty$

より グラフは右図



(2) 求める面積を S' とすると

$$S' = -2 \int_1^4 (x-4)(x-1)^{\frac{1}{2}} dx$$

この変形は $\left(\begin{array}{l} x-1=t \end{array} \right.$ として置換するより

乗に計算できる方法

$$= -2 \int_1^4 \left\{ (x-1)^{\frac{3}{2}} - 3(x-1)^{\frac{1}{2}} \right\} dx$$

$$= -2 \left[\frac{2}{5} (x-1)^{\frac{5}{2}} - 3 \cdot \frac{2}{3} (x-1)^{\frac{3}{2}} \right]_1^4$$

$$= \frac{24\sqrt{3}}{5}$$

教科書とのつながり (公式等)

$$\text{積の導関数 } (fg)' = f'g + fg'$$

補充すべき内容

問題解決のための数学的な考え方

$$\begin{aligned} & \int_1^4 (x-4)\sqrt{x-1} \, dx \text{ は} \\ &= \int_1^4 (x-1-3)(x-1)^{\frac{1}{2}} \, dx \\ &= \int_1^4 \left\{ (x-1)^{\frac{3}{2}} - 3(x-1)^{\frac{1}{2}} \right\} \, dx \\ &= \left[\frac{2}{5} (x-1)^{\frac{5}{2}} - 3 \cdot \frac{2}{3} (x-1)^{\frac{3}{2}} \right]_1^4 \end{aligned}$$

このように変形して積分する方が
部分積分法を用いるより計算が早くできる。