問　$n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots\cdots$ に対して　$I_n=\dfrac{(-1)^n}{n!}\displaystyle\int_0^2 x^n e^x dx$

とおく．ただし，$0!=1$ とする．

(1) I_0 の値を求め，$n=1,\ 2,\ \cdots\cdots$ のとき I_n と I_{n-1} の関係式を求めよ．また，これらを用いて I_3 の値を求めよ．

(2) $0\leqq x\leqq 2$ に対して $e^x\leqq e^2$ であることを利用して，次の不等式を示せ．

$$\frac{1}{n!}\int_0^2 x^n e^x dx \leqq 2e^2\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} \quad (n=1,\ 2,\ \cdots\cdots)$$

(3) 極限 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k 2^k}{k!}$ を求めよ．　　（九州大）

解　(1) 与式に $n=0$ を代入して　$I_0=\dfrac{(-1)^0}{0!}\displaystyle\int_0^2 x^0 e^x dx$

$$=\int_0^2 e^x dx = \left[e^x\right]_0^2 = e^2-1$$

また，与式に部分積分を適用すると，

$$I_n = \frac{(-1)^n}{n!}\int_0^2 x^n (e^x)' dx$$

$$= \frac{(-1)^n}{n!}\left[x^n e^x\right]_0^2 - \frac{(-1)^n}{n!}\int_0^2 n x^{n-1} e^x dx$$

$$= \frac{(-1)^n}{n!}2^n e^2 + \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!}\int_0^2 x^{n-1} e^x dx$$

$$= \frac{(-2)^n}{n!}e^2 + I_{n-1}$$

(2) $0\leqq x\leqq 2$ のとき $e^x\leqq e^2$ より $x^n e^x \leqq x^n e^2$ だから

与えられた条件と与式を比べる

$$\frac{1}{n!}\int_0^2 x^n e^x dx \leqq \frac{1}{n!}\int_0^2 x^n e^2 dx$$

$$= \frac{e^2}{n!}\left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^2 = \frac{2^{n+1}}{(n+1)!}e^2 \quad \text{——①}$$

$n\geqq 1$ なので　$\dfrac{2^{n+1}}{(n+1)!} = \dfrac{2^{n+1}}{1\cdot 2\cdot 3\cdot \cdots \cdot n(n+1)}$

$$\leqq \frac{2\cdot 2\cdot \overbrace{2\cdot 2\cdots 2\cdot 2}^{n-1\text{個}}}{1\cdot 2\cdot \underbrace{3\cdot 3\cdots 3\cdot 3}_{n-1\text{個}}}$$

この変形がポイント

$$= 2\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} \quad \text{——②}$$

よって ①, ② より $\frac{1}{n!}\int_0^2 x^n e^x dx \leqq 2e^2\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$

(3) (1) の結果より $\frac{(-1)^k 2^k}{k!} = \frac{1}{e^2}(I_k - I_{k-1}) \quad (k \geqq 1)$

よって $\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k 2^k}{k!} = \frac{(-1)^0 2^0}{0!} + \sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^k 2^k}{k!}$

(この変形は $\sum_{k=0}^{n} a_k = a_0 + \sum_{k=1}^{n} a_k$)

$$= 1 + \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{e^2}(I_k - I_{k-1})$$

$$= 1 + \frac{1}{e^2}\left\{(\cancel{I_1} - I_0) + (I_2 - \cancel{I_1}) + \cdots + (I_n - I_{n-1})\right\}$$

$$= 1 + \frac{1}{e^2}(I_n - I_0) \quad \text{――③}$$

ここで (2) より $|I_n| \leqq 2e^2\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$ で

$\lim_{n\to\infty} 2e^2\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} = 0$ なので

はさみうちの原理より $\lim_{n\to\infty} I_n = 0$

よって ③ より

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k 2^k}{k!} = 1 + \frac{1}{e^2}(0 - I_0)$$

$$= 1 - \frac{1}{e^2}I_0$$

$$= 1 - \frac{1}{e^2}(e^2 - 1)$$

$$= \frac{1}{e^2}$$

教科書とのつながり（公式等）

和の記号 Σ $\quad \sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n$

部分積分法 $\quad \int f g' = fg - \int f' g$

補充すべき内容

はさみうちの原理 $\quad f(x) \leqq h(x) \leqq g(x)$ のとき，

$\lim_{x \to \infty} f(x) = \alpha, \quad \lim_{x \to \infty} g(x) = \alpha$

ならば $\lim_{x \to \infty} h(x) = \alpha$

被積分関数に三角関数 $\sin x$, $\cos x$ や指導関数 e^x を含む定積分を I_n とし，I_n と I_{n-1} の漸化式を作る場合には部分積分法がよく用いられる。

問題解決のための数学的な考え方

$$\sum_{k=0}^{n} a_k = a_0 + \sum_{k=1}^{n} a_k$$

はさみうちの原理が利用できる不等式を作る場合の変形の一例として次のようなものがある。

$$\frac{2^{n+1}}{(n+1)!} = \frac{2\cdot 2\cdot \overbrace{2\cdot \cdots\cdots \cdot 2\cdot 2}^{n-1\text{個}}}{1\cdot 2\cdot \underbrace{3\cdot \cdots\cdots \cdot n(n+1)}_{n-1\text{個}}} \leqq 2\cdot \frac{\overbrace{2\cdot 2\cdot 2\cdot \cdots \cdot 2\cdot 2}^{n-1\text{個}}}{\underbrace{3\cdot 3\cdot 3\cdot \cdots\cdots \cdot 3\cdot 3}_{n-1\text{個}}} = 2\cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$$