問　aは正の定数とし，次の２つの曲線を C_1，C_2 とする．

$C_1: y = x\log x\ (x>0)$　　$C_2: y = ax^2\ (x>0)$

このとき，

(1)　２つの曲線 C_1，C_2 が異なる２点を共有するような定数 a の範囲を求めよ．

(2)　２つの曲線 C_1，C_2 の共有点の x 座標 p，$q\ (p<q)$ が $q=p^2$ を満たすとき，定数 a および p，q を求めよ．

(3)　上の(2)で定めた定数 a に対して，２つの曲線 C_1，C_2 が囲む領域の面積を求めよ．

（京都府立医大）

解］(1)　$x\log x = ax^2 \quad (x>0)$ より

$f(x)=a$ の形に変形することがポイント

$$\frac{\log x}{x} = a \quad \text{—①}$$

$$f(x) = \frac{\log x}{x}$$

とおくと

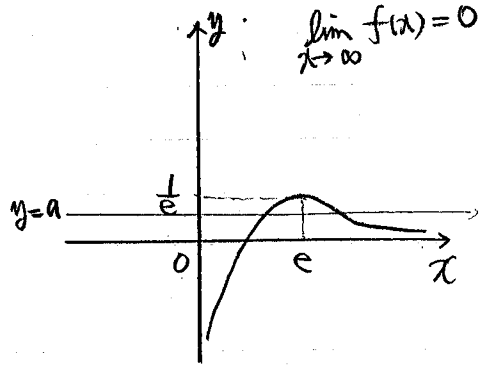
$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x}\cdot x - \log x\cdot 1}{x^2}$$

$$= \frac{1-\log x}{x^2}$$

$=0$ とおくと　$x=e$

x	0	$\cdots$	e	$\cdots$
$f'(x)$		$+$	0	$-$
$f(x)$		$\nearrow$	$\frac{1}{e}$	$\searrow$

$\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$



増減表とグラフは右のようになり

$0 < a < \frac{1}{e}$　…（答）

(2)　p, q は①の解なので

$$\frac{\log p}{p} = \frac{\log q}{q} = a$$

$q=p^2$ より　$\frac{\log p}{p} = \frac{\log p^2}{p^2}$ から

$(p-2)\log p = 0$ より　$p=2$ または $p=1$

$p=1$ のときは $q=1$ となり $p<q$ に反する．

よって

$p=2$，$q=4$，　$a=\frac{\log 2}{2}$　…（答）

(3) $2 \leqq x \leqq 4$ のとき，(1)のグラフより

$\dfrac{\log x}{x} \geqq \dfrac{\log 2}{2}$ だから

$x \log x \geqq \dfrac{\log 2}{2} x^2$ である。

よって求める面積を S とすると，

$$S = \int_2^4 \left(x \log x - \frac{\log 2}{2} x^2 \right) dx$$

$\int x \log x \, dx$ を部分積分

$$= \left[\frac{x^2}{2} \log x - \frac{x^2}{4} - \frac{\log 2}{6} x^3 \right]_2^4$$

$$= 8 \log 4 - 4 - \frac{32}{3} \log 2 - \left(2 \log 2 - 1 - \frac{4}{3} \log 2 \right)$$

$$= \frac{14}{3} \log 2 - 3 \quad \cdots \text{(答)}$$

教科書とのつながり（公式等）

商の導関数 $\left(\dfrac{f}{g}\right)' = \dfrac{f'g - fg'}{g^2}$

部分積分法 $\int_a^b f'g\,dx = [fg]_a^b - \int_a^b fg'\,dx$

補充すべき内容

本問では次の積分をするのに部分積分法を用いた.

$$\int_a^b x\log x\,dx = \int_a^b \left(\frac{x^2}{2}\right)'\log x\,dx$$

$$= \left[\frac{x^2}{2}\log x\right]_a^b - \int_a^b \frac{x^2}{2}\cdot\frac{1}{x}\,dx$$

$\log x$ を式の後半で微分する関数として扱うこと。

問題解決のための数学的な考え方

$y = x\log x$ $(x>0)$ と $y = ax^2$ $(x>0$, aは正の定数$)$ が異なる2点を共有する

$\Leftrightarrow$ 方程式 $x\log x = ax^2$ の実数解が2個存在する.

$x>0$ より両辺を x^2 で割って

方程式 $\dfrac{\log x}{x} = a$ の実数解が2個存在する.

$\Leftrightarrow$ 関数 $y = \dfrac{\log x}{x}$ と直線 $y = a$ が異なる2点を共有する