問　$\alpha>0$ とし，$x>0$ で定義された関数　$f(x)=\left(\dfrac{e}{x^{\alpha}}-1\right)\dfrac{\log x}{x}$
を考える．$y=f(x)$ のグラフより下側で x 軸より上側の部分の面積を α であらわせ．
ただし，e は自然対数の底である．　（京都大）

解　$e^{\frac{1}{\alpha}}>0$　より　$x>0$ における $f(x)$ の符号は下表のようになる．

$\dfrac{e}{x^{\alpha}}-1=0$ となる x は $x^{\alpha}=e$ より $x=e^{\frac{1}{\alpha}}$

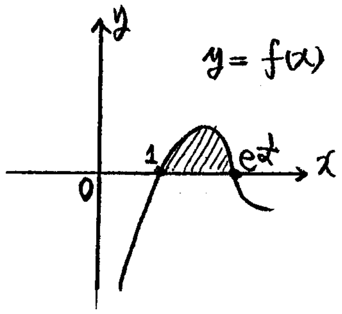
また，$e\fallingdotseq 2.718$ より $e^{\frac{1}{\alpha}}>1$

x	(0)	$\cdots$	1	$\cdots$	$e^{\frac{1}{\alpha}}$	$\cdots$
$\frac{e}{x^{\alpha}}-1$		$+$		$+$	0	$-$
$\frac{\log x}{x}$		$-$	0	$+$	$+$	$+$
$f(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$

よって　$f(x)\geqq 0 \iff 1\leqq x\leqq e^{\frac{1}{\alpha}}$

求める図形の面積を S とすると，

$$S=\int_{1}^{e^{\frac{1}{\alpha}}}\left(\frac{e}{x^{\alpha}}-1\right)\frac{\log x}{x}\,dx$$



$\log x$ を t で置き換える置換積分法 $\longrightarrow$ $t=\log x$　とおくと

$\dfrac{dt}{dx}=\dfrac{1}{x}$　より　$dt=\dfrac{dx}{x}$　，

x	1 $\cdots$ $e^{\frac{1}{\alpha}}$
t	0 $\cdots$ $\frac{1}{\alpha}$

$$S=\int_{0}^{\frac{1}{\alpha}}\left(e^{1-\alpha t}-1\right)t\,dt$$

$$=\int_{0}^{\frac{1}{\alpha}} t\,e^{1-\alpha t}-\int_{0}^{\frac{1}{\alpha}} t\,dt$$

部分積分法

$$=\left[-\frac{1}{\alpha}t\,e^{1-\alpha t}\right]_{0}^{\frac{1}{\alpha}}+\frac{1}{\alpha}\int_{0}^{\frac{1}{\alpha}}e^{1-\alpha t}dt-\left[\frac{1}{2}t^{2}\right]_{0}^{\frac{1}{\alpha}}$$

$$=-\frac{1}{\alpha^{2}}+\frac{1}{\alpha}\left[-\frac{1}{\alpha}e^{1-\alpha t}\right]_{0}^{\frac{1}{\alpha}}-\frac{1}{2\alpha^{2}}$$

$$=\frac{1}{\alpha^{2}}\left(e-\frac{5}{2}\right)$$

教科書とのつながり（公式等）

対数関数 $y=\log x$ のグラフ

置換積分法

部分積分法 $\int fg' = fg - \int f'g$

補充すべき内容

本問のように関数 $y=f(x)$ が2つの関数の積で構成されていて，$f(x)$ の符号を考える場合は，それぞれの関数が定義域において正になる場合と負になる場合を表にし，$f(x)$ の符号を調べる。

問題解決のための数学的な考え方

置換積分法を用いる典型的な例として $\dfrac{\log x}{x}$ を積分するときは $t=\log x$ と置き換える。