問　aを実数とし，関数 $f(x)=(2x-3)\log(a-x)$ を考える．次の問いに答えよ．

(1) $f(x)\geqq 0$ を満たすxの範囲を求めよ．

(2) $a=1$ のとき，$f(x)$ は増加関数であることを示し，$f(x)$ のグラフの凹凸，変曲点を調べて，そのグラフの概形をかけ．

（兵庫県立大）

解 (1) $f(x)=(2x-3)\log(a-x)$ の定義域は $x<a$ で

$\log(a-x)=0$ となる x は $a-x=1$ より $x=a-1$ なので

$\log 1 = 0$

$f(x)\geqq 0$ を満たす x の範囲は次の不等式の解である．

$$\begin{cases} 2x-3\leqq 0 \\ a-1\leqq x<a \end{cases} \quad \text{または} \quad \begin{cases} 2x-3\geqq 0 \\ x\leqq a-1 \end{cases}$$

よって

$$\left.\begin{array}{ll} a\leqq \frac{3}{2} \text{ のとき} & a-1\leqq x<a \\ \frac{3}{2}<a\leqq \frac{5}{2} \text{ のとき} & a-1\leqq x\leqq \frac{3}{2} \\ \frac{5}{2}<a \text{ のとき} & \frac{3}{2}\leqq x\leqq a-1 \end{array}\right\} \cdots \text{(答)}$$

(2) $a=1$ のとき　$f(x)=(2x-3)\log(1-x)\quad (x<1)$

$$f'(x)=2\log(1-x)+\frac{2x-3}{x-1}$$

$$f''(x)=\frac{2}{x-1}+\frac{1}{(x-1)^2}=\frac{2x-1}{(x-1)^2}$$

より $x<\frac{1}{2}$ のとき $f''(x)<0$，$\frac{1}{2}<x<1$ で $f''(x)>0$

なので $f'(x)$ は $x=\frac{1}{2}$ で最小値をとる．

$$f'(x)\geqq f'\left(\frac{1}{2}\right)=2\log\frac{1}{2}+\frac{-2}{-\frac{1}{2}}$$

$$=4-\log 2>0$$

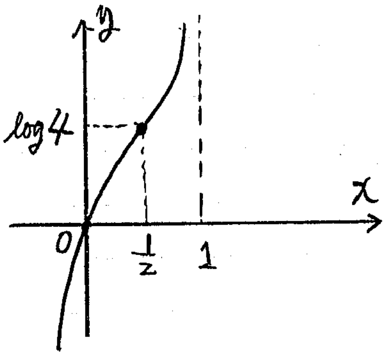
なので $f(x)$ は増加関数である．

また，増減表と極限は次のようになり，グラフは下図．

x		$\frac{1}{2}$		1
$f'(x)$	$+$	$+$	$+$	
$f''(x)$	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$\nearrow$	$\log 4$	$\nearrow$	

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \to 1-0} f(x) = \infty$$



$x=1$ は漸近線

教科書とのつながり（公式等）

対数関数のグラフ

$$\left(\begin{array}{lll} 0<x<1 & \text{のとき} & y=\log x<0 \\ x=1 & \text{のとき} & y=\log x=0 \\ x>1 & \text{のとき} & y=\log x>0 \end{array}\right)$$

$f'(x)>0 \iff f(x)$ は 増加関数（単調増加する）

補充すべき内容　本問から学べる数学的な考え方

本問の場合，$f(x)=(2x-3)\log(a-x)$ の符号を考えるが，

真数条件 より $a-x>0$ から $x<a$

また $\log(a-x)$ の符号は $a-x$ と 1 の大小関係で

決まるので，$2x-3$ の符号の分かれ目である $\frac{3}{2}$

も考慮して場合分けをする必要がある。