問　曲線 $y=\sqrt{x}$ について，次の問いに答えよ．

(1)　この曲線上の点 $(a,\ \sqrt{a})$ $(a>0)$ における接線と x 軸およびこの曲線で囲まれた図形の面積 $S_1(a)$ を求めよ．

(2)　この曲線上の点 $(a,\ \sqrt{a})$ $(a>0)$ における法線と x 軸およびこの曲線で囲まれた図形の面積 $S_2(a)$ を求めよ．

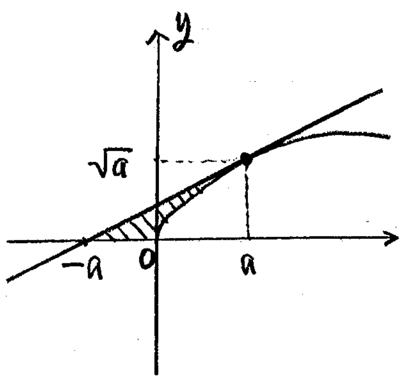
(3)　$\displaystyle\lim_{a\to+\infty}\frac{S_1(a)}{S_2(a)}$ を求めよ．

（福岡教育大）

解］(1)　$y=\sqrt{x}$ より

$(\sqrt{x})'=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ はよく出てくる．

$$y'=\frac{1}{2\sqrt{x}}$$



接線は

$$y-\sqrt{a}=\frac{1}{2\sqrt{a}}(x-a)$$

$$\Leftrightarrow\quad y=\frac{1}{2\sqrt{a}}x+\frac{\sqrt{a}}{2}$$

右上の図の斜線部分の面積なので

外側は直角三角形

$$S_1(a)=\frac{1}{2}\cdot 2a\cdot\sqrt{a}-\int_0^a\sqrt{x}\,dx$$

$$=a\sqrt{a}-\left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right]_0^a$$

$$=\frac{1}{3}a\sqrt{a}\quad\text{―― (答)}$$

(2) 垂直条件より法線の傾きは $-2\sqrt{a}$ なので

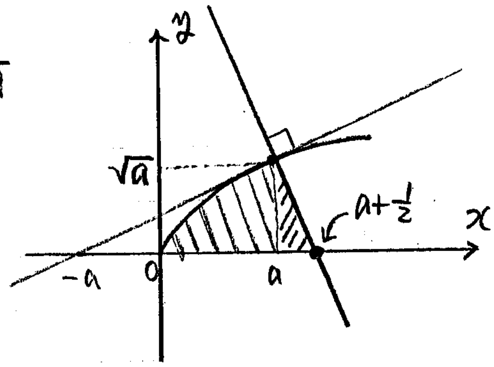
法線は

垂直条件 $m \cdot m' = -1$

$$y - \sqrt{a} = -2\sqrt{a}(x - a)$$

$$\Leftrightarrow \quad y = -2\sqrt{a}\,x + 2a\sqrt{a} + \sqrt{a}$$

右図の斜線部分の面積なので



$$S_2(a) = \int_0^a \sqrt{x}\,dx + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\sqrt{a}$$

$x=a$ を境に左側と右側に分けた。

$$= \frac{2}{3}a\sqrt{a} + \frac{1}{4}\sqrt{a} \quad \text{---(答)}$$

(3) (1), (2) より

$$\lim_{a \to +\infty} \frac{S_1(a)}{S_2(a)}$$

$$= \lim_{a \to +\infty} \frac{\frac{1}{3}a\sqrt{a}}{\frac{2}{3}a\sqrt{a} + \frac{1}{4}\sqrt{a}}$$

$$= \lim_{a \to +\infty} \frac{\frac{1}{3}}{\frac{2}{3} + \frac{1}{4a}}$$

$$= \frac{1}{2} \quad \text{---(答)}$$

教科書とのつながり（公式等）

接線の方程式

法線の方程式

$y=f(x)$ 上の点 $(a,\ f(a))$ における法線の方程式は

$$y-f(a)=-\frac{1}{f'(a)}(x-a)$$

極限

補充すべき内容

$$(\sqrt{x})'=\frac{1}{2\sqrt{x}},\quad \int\sqrt{x}\,dx=\int x^{\frac{1}{2}}dx=\frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1}+C=\frac{2}{3}x\sqrt{x}+C$$

（Cは積分定数）