媒介変数tを用いて $x=t^2$, $y=-t^3+4t^2-5t+3$ $(0\leqq t\leqq 2)$ で表されるxy平面上の曲線Cについて，次の問いに答えよ．

(1) 接線の傾きが0となる曲線C上の点の座標を求めよ．また，曲線Cの概形を描け．

(2) 曲線Cとx軸，y軸および直線 $x=4$ で囲まれた図形をDとする．Dの面積Sを求めよ．

(3) Dをy軸のまわりに1回転させてできる立体の体積Vを求めよ．

解 (1) $x=t^2$ より $\dfrac{dx}{dt}=2t$

$y=-t^3+4t^2-5t+3$ より $\dfrac{dy}{dt}=-3t^2+8t-5$

$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\dfrac{-3t^2+8t-5}{2t}=0$ とおくと

$3t^2-8t+5=0$ $(t-1)(3t-5)=0$ より $t=1,\ \dfrac{5}{3}$

$t=1$ のとき， $x=1$, $y=1$

$t=\dfrac{5}{3}$ のとき， $x=\dfrac{25}{9}$, $y=\dfrac{31}{27}$

よって求める点の座標は $(1,1)$, $\left(\dfrac{25}{9}, \dfrac{31}{27}\right)$

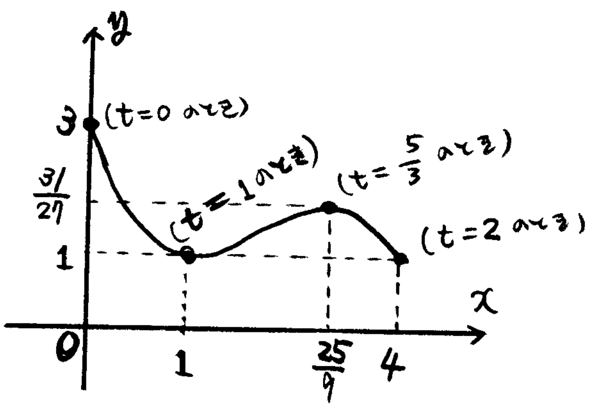
増減表は

t	0	…	1	…	$\frac{5}{3}$	…	2
$\frac{dx}{dt}$		+		+		+	
$\frac{dy}{dt}$		−	0	+	0	−	
y	3	↘	1	↗	$\frac{31}{27}$	↘	1

$t=0$ のとき， $x=0$, $y=3$

$t=2$ のとき， $x=4$, $y=1$

曲線Cの概形は次のようになる



(2) $S=\displaystyle\int_0^4 y\,dx$ で、 $\begin{array}{c|c} x & 0\to 4 \\ \hline t & 0\to 2 \end{array}$ より

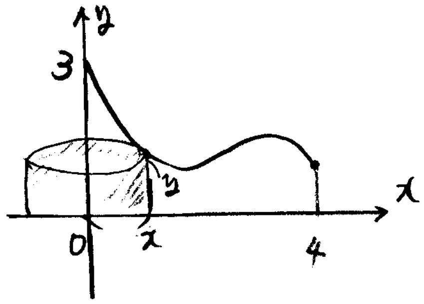
$$=\int_0^2 y\frac{dx}{dt}\cdot dt$$

$$=\int_0^2(-t^3+4t^2-5t+3)\cdot 2t\,dt$$

$$=2\int_0^2(-t^4+4t^3-5t^2+3t)dt$$

$$=2\left[-\frac{t^5}{5}+t^4-\frac{5}{3}t^3+\frac{3}{2}t^2\right]_0^2=\frac{68}{15}$$

(3)



上図の円筒の面積は $y\times 2x\pi=2\pi xy$ なので

$V=\displaystyle\int_0^4 2\pi xy\,dx$ $\begin{array}{c|c} x & 0\to 4 \\ \hline t & 0\to 2 \end{array}$ より

$$=2\pi\int_0^2 xy\frac{dx}{dt}\cdot dt$$

$$=2\pi\int_0^2 t^2(-t^3+4t^2-5t+3)\cdot 2t\cdot dt$$

$$=4\pi\int_0^2(-t^6+4t^5-5t^4+3t^3)dt$$

$$=4\pi\left[-\frac{t^7}{7}+\frac{2}{3}t^6-t^5+\frac{3}{4}t^4\right]_0^2$$

$$=\frac{368}{21}\pi$$