問　関数 $f(x)=\dfrac{\log x}{x}$ に対して，以下の問いに答えよ．ただし，$\log x$ は自然対数とし，その底を e とする．

(1) 関数 $y=f(x)$ の増減を調べ，そのグラフの概形をかけ．ただし，凹凸を調べる必要はない．また $\lim_{x\to\infty} f(x)=0$ は既知としてよい．

(2) x についての方程式 $f(x)=m$ が相異なる2解 α, β $(0<\alpha<\beta)$ を持つとき，実数 m のとりうる範囲を求めよ．さらに，このときの解 α のとりうる範囲も求めよ．

(3) 実数 m が(2)で求めた範囲にあるとき，　$S=\int_1^e |\log x - mx|\,dx$

とおく．このとき，S を α を用いて表せ．

(4) S を最小にする α の値を求めよ．　　　　　　　　　（電気通信大）

解　(1)　$f'(x)=\dfrac{\frac{1}{x}\cdot x-\log x\cdot 1}{x^2}=\dfrac{1-\log x}{x^2}$

商の導関数
$\left(\dfrac{f}{g}\right)'=\dfrac{f'g-fg'}{g^2}$

$=0$ とおくと，

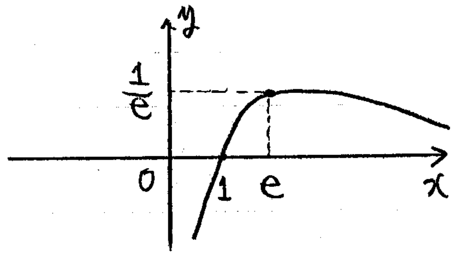
$\log x=1$ より　$x=e$

増減表は右図

x	0	$\cdots$	e	$\cdots$
$f'(x)$	╲	$+$	0	$-$
$f(x)$	╲	↗	$\frac{1}{e}$	↘

また，

$\lim_{x\to+0} f(x)=-\infty$，　$\lim_{x\to\infty} f(x)=0$　より　グラフは下図



--- (答)

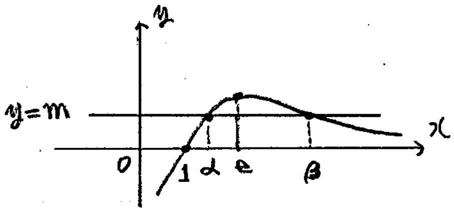
(2)　(1)の $y=f(x)$ のグラフと $y=m$ のグラフの共有点を考えて

$0<m<\dfrac{1}{e}$　--- (答)

また解 α は小さい方の解なので

$1<\alpha<e$　--- (答)

(3)



(2) より　$1 \leqq x \leqq \alpha$ のとき，$f(x) \leqq m$

$$\iff \frac{\log x}{x} \leqq m$$

$$\iff \log x \leqq mx$$

$\alpha \leqq x \leqq e$ のとき，$f(x) \geqq m$

$$\iff \log x \geqq mx$$

また，$f(\alpha) = m$ より　$\dfrac{\log \alpha}{\alpha} = m$

$$S = \int_1^e |\log x - mx|\,dx$$

$$= \int_1^\alpha (mx - \log x)\,dx + \int_\alpha^e (\log x - mx)\,dx$$

$$= \left[\frac{1}{2}mx^2 - x\log x + x\right]_1^\alpha + \left[x\log x - x - \frac{1}{2}mx^2\right]_\alpha^e$$

$$= m\left(\alpha^2 - \frac{1+e^2}{2}\right) + 2\alpha(1-\log\alpha) - 1$$

$$= \frac{\log\alpha}{\alpha}\left(\alpha^2 - \frac{1+e^2}{2}\right) + 2\alpha(1-\log\alpha) - 1$$

$$= 2\alpha - 1 - \left(\alpha + \frac{1+e^2}{2\alpha}\right)\log\alpha \quad \cdots \text{(答)}$$

(4) $S = g(\alpha) = 2\alpha - 1 - \left(\alpha + \dfrac{1+e^2}{2\alpha}\right)\log\alpha$ とおくと,

展開して $(fg)' = f'g + fg'$ を利用した.

$$g'(\alpha) = 2 - \left(1 - \frac{1+e^2}{2\alpha^2}\right)\log\alpha - \left(\alpha + \frac{1+e^2}{2\alpha}\right)\frac{1}{\alpha}$$

$$= 1 - \frac{1+e^2}{2\alpha^2} - \left(1 - \frac{1+e^2}{2\alpha^2}\right)\log\alpha$$

$$= \left(1 - \frac{1+e^2}{2\alpha^2}\right)\left(1 - \log\alpha\right)$$

$= 0$ とおくと, $1 < \alpha < e$ より

$$1 - \frac{1+e^2}{2\alpha^2} = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad 2\alpha^2 = 1 + e^2$$

$$\Leftrightarrow \quad \alpha = \sqrt{\frac{1+e^2}{2}}$$

増減表は

α	1	$\cdots$	$\sqrt{\frac{1+e^2}{2}}$	$\cdots$	e
$g'(\alpha)$		$-$	0	$+$	
$g(\alpha)$		$\searrow$		$\nearrow$	

よって S を最小にする α の値は

$$\sqrt{\frac{1+\alpha^2}{2}} \quad \cdots \text{(答)}$$

教科書とのつながり（公式等）

商の導関数 $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$

補充すべき内容

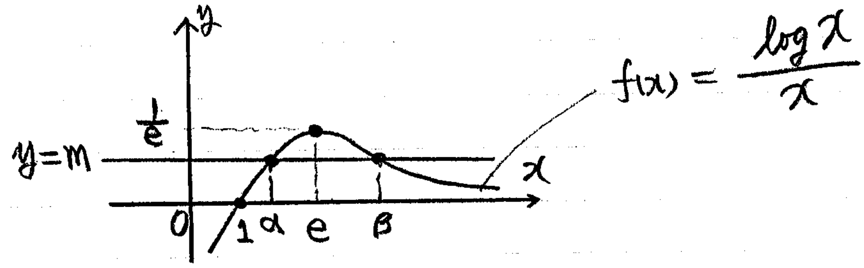
絶対値を含む定積分

$a \leqq x \leqq b$ で $f(x) \geqq 0$ のとき $\int_a^b |f(x)|dx = \int_a^b f(x)dx$

$a \leqq x \leqq b$ で $f(x) < 0$ のとき $\int_a^b |f(x)|dx = -\int_a^b f(x)dx$

問題解決のための数学的な考え方

グラフから条件を読み取ること。



このグラフからは次の条件が読み取れる。

$0 < m < \frac{1}{e}$, $1 < \alpha < e$, $e < \beta$,

$1 \leqq x \leqq \alpha$ のとき, $\frac{\log x}{x} \leqq m \Leftrightarrow \log x \leqq mx$

$\alpha \leqq x \leqq e$ のとき, $\frac{\log x}{x} \geqq m \Leftrightarrow \log x \geqq mx$