問　$f_n(x)=\dfrac{1}{(1+x^2)^n}$ $(-\infty<x<\infty,\ n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$ として以下の問に答えよ．

(1)　$I_n=\int_0^1 f_n(x)dx$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$ とするとき，次が成り立つことを示せ．

$$I_n=\frac{2n-3}{2n-2}I_{n-1}+\frac{1}{2^n(n-1)} \quad (n=2,\ 3,\ 4,\ \cdots\cdots)$$

(2)　$y=f_2(x)$ $(-\infty<x<\infty)$ の増減，凹凸，極値を調べて，グラフの概形を描け．

(3)　$y=f_2(x)$ と x 軸および2直線 $x=-1$，$x=1$ とで囲まれた図形を x 軸のまわりに回転してできる立体の体積 V を求めよ．

（防衛医大）

解 (1)　$n \geqq 2$ のとき，

$$I_{n-1}=\int_0^1 f_{n-1}(x)dx=\int_0^1 \frac{1}{(1+x^2)^{n-1}}dx$$

証明すべき式に I_{n-1} があるので

$$=\left[x\cdot\frac{1}{(1+x^2)^{n-1}}\right]_0^1-\int_0^1 x\cdot\frac{-2(n-1)x}{(1+x^2)^n}dx$$

$$=\frac{1}{2^{n-1}}+2(n-1)\int_0^1\frac{(1+x^2)-1}{(1+x^2)^n}dx$$

$$=\frac{1}{2^{n-1}}+2(n-1)(I_{n-1}-I_n)$$

よって　$2(n-1)I_n=(2n-3)I_{n-1}+\dfrac{1}{2^{n-1}}$

$$I_n=\frac{2n-3}{2n-2}I_{n-1}+\frac{1}{2^n(n-1)} \quad \cdots 答)$$

(2)　$y=f_2(x)=\dfrac{1}{(1+x^2)^2}=(1+x^2)^{-2}$

$y'=-4x(1+x^2)^{-3}=\dfrac{-4x}{(1+x^2)^3}$

$y''=-4(1+x^2)^{-3}+12x\cdot 2x\cdot(1+x^2)^{-4}=\dfrac{4(5x^2-1)}{(1+x^2)^4}$

$f_2(-x)=f_2(x)$ より $f_2(x)$ は偶関数で $x\geqq 0$ で考えると

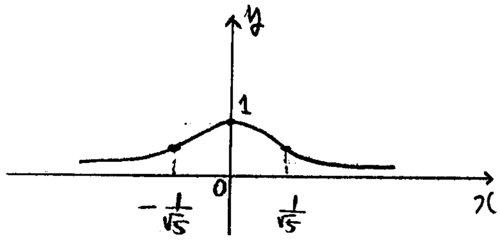
$y'=0$ とおくと $x=0$，　$y''=0$ とおくと $x=\dfrac{1}{\sqrt{5}}$

増減表は

x	0		$\frac{1}{\sqrt{5}}$	
y'		$-$	$-$	$-$
y''		$-$	0	$+$
y	1	↘		↘

また，$f_2\left(\dfrac{1}{\sqrt{5}}\right)=\dfrac{25}{36}$，　$\lim_{x\to\infty}f_2(x)=0$ より

グラフの概形は
右のようになる。



--- (答)

(3) 求める体積 V は

$$V = \int_{-1}^{1} \pi \left\{ \frac{1}{(1+x^2)^2} \right\}^2 dx = 2\pi \int_0^1 \frac{1}{(1+x^2)^4}\, dx$$

$$= 2\pi I_4 \quad \text{——①}$$

(1) より $I_4 = \frac{5}{6} I_3 + \frac{1}{48}$

$$= \frac{5}{6}\left(\frac{3}{4} I_2 + \frac{1}{16}\right) + \frac{1}{48}$$

$$= \frac{5}{8} I_2 + \frac{7}{96}$$

$$= \frac{5}{8}\left(\frac{1}{2} I_1 + \frac{1}{4}\right) + \frac{7}{96}$$

$$= \frac{5}{16} I_1 + \frac{11}{48} \quad \text{——②}$$

ここで $I_1 = \int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\, dx$

この置き換えがポイント

$x = \tan\theta$ とおくと $\frac{dx}{d\theta} = \frac{1}{\cos^2\theta}$

x	$0 \to 1$
θ	$0 \to \frac{\pi}{4}$

なので

$$I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{1+\tan^2\theta} \cdot \frac{d\theta}{\cos^2\theta}$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta = \left[\theta\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{4}$$

②に代入して $I_4 = \frac{5}{16} \cdot \frac{\pi}{4} + \frac{11}{48} = \frac{5}{64}\pi + \frac{11}{48}$

①に代入して

$$V = 2\pi \left(\frac{5}{64}\pi + \frac{11}{48} \right)$$

$$= \pi \left(\frac{5}{32}\pi + \frac{11}{24} \right)$$

--- (答)

教科書とのつながり（公式等）

部分積分法

x軸の周りに1回転してできる立体の体積 $V=\pi\int_a^b \{f(x)\}^2 dx$

定積分の置換積分法

$\int_\alpha^\beta \frac{1}{x^2+a^2}dx$ の積分は $x=a\tan\theta$ と置換する

補充すべき内容

y軸の周りに1回転してできる立体の体積 $V=\pi\int_a^b \{g(y)\}^2 dy$

定積分の置換積分法

$\int_\alpha^\beta \sqrt{a^2-x^2}\,dx$ の積分は $x=a\sin\theta$ と置換する

$$\int \cos^2\theta\, d\theta = \int \frac{1+\cos 2\theta}{2}d\theta = \frac{\theta}{2}+\frac{\sin 2\theta}{4}+C$$

（Cは積分定数）

問題解決のための数学的な考え方

$I_n=\int_0^1 \frac{1}{(1+x^2)^n}dx$ から $n\geqq 2$ のとき，

$I_{n-1}=\int_0^1 \frac{1}{(1+x^2)^{n-1}}dx$ を作り，これを部分積分する

ことにより，右辺に I_n と I_{n-1} が出現する。

この式を整理して，I_n を I_{n-1} で表すことができる。

このとき，$\int \frac{x^2}{(1+x^2)^n}dx$

$$=\int \frac{(1+x^2)-1}{(1+x^2)^n}dx = \int \frac{1}{(1+x^2)^{n-1}}dx - \int \frac{1}{(1+x^2)^n}dx$$

という変形が重要である。