問　定積分 $I_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\,dx$ について，次の問に答えよ．ただし，n は0以上の整数とする．

(1) $n\geqq 2$ として，$I_n=K_nI_{n-2}$ となる K_n を求めよ．

(2) $I_5=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^5 x\,dx$ を求めよ．

(3) $I_6=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^6 x\,dx$ を求めよ．　　　　(防衛大)

解] (1) $n\geqq 2$ のとき,

$$I_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\cdot\sin^{n-1}x\,dx$$

この変形がポイント

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(-\cos x)'\sin^{n-1}x\,dx$$

部分積分法

$$=-\left[\cos x\cdot\sin^{n-1}x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}+(n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x\cdot\sin^{n-2}x\cdot\cos x\,dx$$

$$=(n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\sin^2 x)\sin^{n-2}x\,dx$$

$$=(n-1)(I_{n-2}-I_n)$$

$nI_n=(n-1)I_{n-2}$ より $I_n=\frac{n-1}{n}I_{n-2}$　$\therefore K_n=\frac{n-1}{n}$

(2) $I_5=\frac{4}{5}I_3=\frac{4}{5}\left(\frac{2}{3}I_1\right)=\frac{8}{15}I_1$

$I_1=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\,dx=\left[-\cos x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=1$ なので $I_5=\frac{8}{15}$

(3) $I_6=\frac{5}{6}I_4=\frac{5}{6}\left(\frac{3}{4}I_2\right)=\frac{5}{8}I_2$

$$=\frac{5}{8}\left(\frac{1}{2}I_0\right)=\frac{5}{16}I_0$$

$I_0=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^0 x\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}dx=\left[x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{2}$ なので

$I_6=\frac{5}{16}\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{5}{32}\pi$

教科書とのつながり（公式等）

部分積分法

$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$

補充すべき内容

本問から学べる数学的な考え方

$\sin^n x$ や $\cos^n x$ の積分で漸化式を作るには

本問のように

$$\int \sin^n x \, dx = \int \sin x \cdot \sin^{n-1} x \, dx$$

$$= \int (-\cos x)' \sin^{n-1} x \, dx$$ というように変形して

部分積分法を用いる。