

論理的な思考力を育成する学習指導方法に関する研究

- 図形領域における論証指導を通して -

嬉野町立嬉野中学校 教諭 八田 真一郎

要 旨

本研究においては、生徒の論理的な思考力を育成することを目的として研究を進めてきた。そのために、問題解決学習をモデルとして、帰納的類推を促すためのコンピュータの活用、証明の流れを見通すためのグループ活動、生徒の思考を助ける定理・定義カードの利用などを授業に取り入れることで論理的な思考力の育成を図ろうと試みた。

その結果、カードのパズル感覚的要素も手伝って、意欲的に、かつ試行錯誤をしながら、証明に取り組むことができ、生徒の論理的な思考力も育成できたと考える。

<キーワード> 論理的な思考力 問題解決学習 定理・定義カード コンピュータ

1 主題設定の理由

様々な情報が飛び交い複雑に絡み合っている現代社会にあって、知的好奇心・探究心をもって、主体的に学ぶ力を身に付けることは大切である。資源に乏しい我が国においては、人間の知的創造力が最大の資産であり、創造性の基礎を培うとされる論理的な思考力の育成は、数学科が担うべき役割の一つである。

これまでの学習指導においても、論証指導は論理的な思考力を育成するのに重要な働きをしてきたが、十分な成果を上げているだろうか。生徒は単に定義・定理を覚え、仮定から結論を機械的に導こうとしてしまっていて、定義・定理などを体系的なものとして整理できておらず、そのため、論証に深化がなく、同じような問題は解くことができていても応用力をもった生徒の育成にはつながっていないように思われる。覚えた定義や定理を安易に当てはめるだけでなく、今後は証明のプロセスを楽しみ、演繹的な推論の方法を活用できる生徒の育成を目指す必要があるだろう。

そこで本研究においては、仮定から結論に至る証明の流れを大切にしたい授業の在り方を探究したい。具体的には、生徒の直観・洞察を大切に、思考の過程を明確にさせるための工夫をすることによって、論理的な思考力、特に演繹的な推論を身に付けさせたいと考え、本主題を設定した。

2 研究の目標

一人一人の生徒が課題を解決していく過程を通して、論理的な思考力を育成するための方策を探る。

3 研究の仮説

数学科図形領域の学習過程において、次のような手立てを取れば、論理的な思考力を身に付けさせることができるであろう。

自ら課題を発見できるような学習の場の設定。

課題や見通しを共有する学習の場の設定。

根拠を明らかにし、思考過程を振り返るための定理・定義カードの利用。

4 研究の内容と方法

(1) 研究の内容

- ア 「論理的な思考力」「論証指導」について先行文献や実践例に学ぶ。
- イ 論理的な思考力を問うような問題に関する生徒の実態を把握する。
- ウ 論理的な思考力を高めるための授業の在り方を実践を通して探究する。

(2) 研究の方法

- ア 「論理的な思考力」や「論証指導」について、文献や資料を基に理論研究を行う。
- イ 論理的な思考力に視点を定め、生徒の実態について調査を行う。
- ウ 検証授業を行い、生徒の論理的な思考力の伸びを検証し、考察する。
- エ 研究の成果と課題をまとめる。

表 1 実践化へ向けての手立て

場 面	手立て	具体的な内容など
帰納的類推の場	具体物	実際に紙に図形を書き、角の大きさや辺の長さを測ったり、紙を折り曲げたりし、図形を操作しながら含まれる性質を探る。
	コンピュータ	作図ツールソフトを用い、図形をシミュレートし、その性質を探る。 性質を保ったまま図形を動かし、その中に含まれる性質を探る。紙に書いた図形は形を変えることができないが、コンピュータ上では自由に形を変えることができる。紙に書かれた図形の場合はその書かれた図形のみのものであり、コンピュータ上ではその性質が、同じ条件をもつ図形の普遍的な性質であることを直観的につかむことができる。
問題把握の場	コミュニケーション活動	生徒同士情報を交換することによって、より問題を意識化させる。
見通す場	コミュニケーション活動	生徒同士情報を交換し、仮定から結論までの流れを見通させる。
演繹的推論の場	定理・定義カード	定理・定義カードを用いることで、トップダウンやボトムアップ処理を行いながら証明を目に見える形で行う。また、パズル感覚で論証が苦手な生徒でも取り組めるようにする。
振り返る場	ワークシート	ワークシートなどを用いて学習した内容の確認をする。また、類題などの演習をし、定着を図る。最終的には得られた結論から発展的な思考ができるようにしなければならないと考える。

5 研究の実際

(1) 各場面における手立て

本研究における問題解決学習のモデルを具体化するため、ポリアやレスターの問題解決学習に関する理論を参考にして(図1)、5つの場面を設定した。各場面における手立てと、具体的内容を右の表1にまとめた。

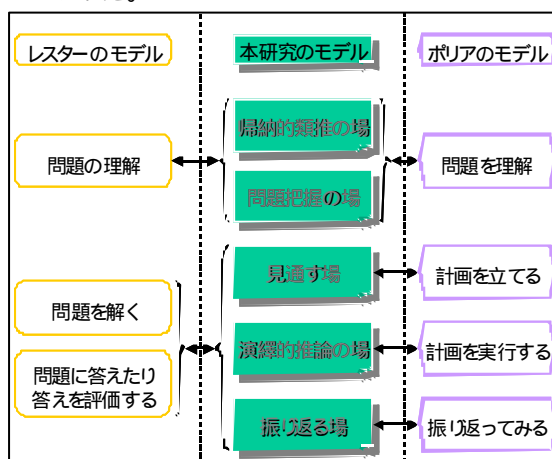


図 1 学習モデル対応図

(2) 定理・定義カード

ア 定理・定義カードを使う目的

生徒が証明を難しい、嫌いだと考える理由の一つとして、いきなり証明を数学的な表現を用いて記述しなければならないことにありとされる。本来演繹的な推論を行うときは形式的操作で行う。しかし、それは生徒にとって、特に証明の導入段階では大変に難しい。そこで、「証明するための思考活動」と「証明を表現する活動」との橋渡しをする記号的表現による活動が必要であると考えた。定理・定義カードは、結論を導くための根拠となるものである。このカードを単に選んだり並べたりするのではなく、意味があるように、つながりがあるように並べることで、証明の流れをつかませる。また、パズル感覚で証明の流れを作ることによって意欲的に取り組むであろうと考える。

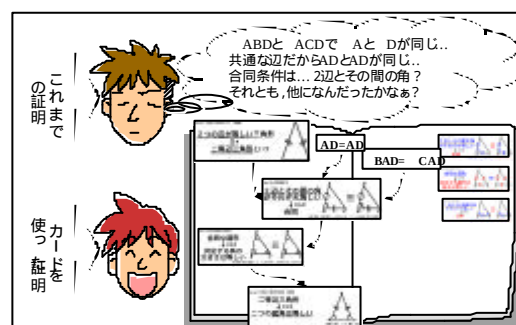


図 2 カードを使った証明



図 3 定理・定義カードの例

従来頭の中だけで考えていた証明の流れを、カードを用いることにより目に見える形にすれば、推論の一步が踏み出しやすくなり、更に流れもつかみやすくなると考える。定理・定義カードをうまく利用することこそ、論理的な思考力を育成する手立てであると考え。

イ 定理・定義カードを使うことによって、どのような数学的活動が可能になるか

- (ア) カードを使うことにより、思考過程が明らかになる。
- (イ) 従来は頭の中で試行錯誤していたが、目に見える形での試行錯誤が行いやすくなる。
- (ウ) 教科書から定理・定義を見付け出さなくても済む。
- (エ) カードを新しく作る作業により、新しい知識を獲得したと意識化できる。

(3) 検証授業の展開

場面	学習活動	形態	教師の指導・支援
導入	1 二等辺三角形を作ろう！	個	・白紙の紙を配り、二等辺三角形をコンパス、定規を用いて書かせ、切り取らせる。
展開	2 二等辺三角形を定義する。	一斉	・言葉の意味から考えさせる。
	3 二等辺三角形を見て気付きはないか考えよう。	個	・作図ツールソフトを利用し、生徒の考えを助ける。
	視点 《帰納的な類推の場合は生徒の考えを引き出す上で有効か》 二等辺三角形の性質を見付けることができたか？		
	4 二等辺三角形の性質について調べる。	個	・底角が等しいことを確認させる。
	仮定と結論を確認する。	個 G	・引いた補助線によって証明が変わることに注意させる。
	補助線の引き方を考える。		・証明につながらない引き方をした生徒にはなぜできないか考えさせる。
	視点 《課題や見通しを共有するための場合は適切であったか》 グループで考えを出し合い、自分の考えをまとめることができたか？ グループで流れを確認してみる。	G	・カードをワークシート上に並べるよう指示する。
			・循環論法にならないよう注意する。
			・グループ内で確認するよう指示する。
			・正しく並べられたか確認し活動を振り返らせる。
	視点 《定理・定義カードは演繹的な推論を助ける上で有効であったか》 正しいカードを選び、正しく並べることができたか？ 証明を記述する。	個	・丁寧に書くよう指示する。
まとめ	5 新しいカードを作る。		・新しい知識としてのカードということ意識させる。
	6 ワークシートの問題を解く。		・二等辺三角形の性質を使った簡単な問題を解き、知識が定着するように配慮する。

(4) 検証の視点

視点 《帰納的な類推の場合は生徒の考えを引き出す上で有効か》

同じ条件をもったすべての図形において、共通の事柄が成り立つということに気付かせたい。条件を保ったまま図形を変化させ、その図形に隠された性質を探っていく。そのために道具として作図ツールソフトや具体物を使う。図形に隠された性質を見付けられるかどうかを検証する。

視点 《課題や見通しを共有するための場合は適切であったか》

自分個人の考えだけでなく、グループで話し合うことにより、より深く、より多面的に性質を確認できたり見通しをもつことができると考える。話し合うことにより、性質を発見したり、結論までの流れを見通したりすることができたかどうかを検証する。

視点 《定理・定義カードは演繹的な推論を助ける上で有効であったか》

カードは既知の事項、つまり根拠となる事柄の象徴である。このカードを正しく選ぶことができるか、つながりがあるように並べることができるかが証明できるかどうかの鍵となる。根拠となる事柄の象徴であるこのカードをうまく選び並べることができたかどうかを検証する。

(5) 検証授業の考察

ア 視点

授業では、コンピュータと紙に書いた二等辺三角形を利用して、底角が等しいということに気付かせた。図4から分かるとおり63%の生徒が底角が等しいことに自らの力で気付いている。どのようにして気付いたのかという質問の答は表2のように3つに分かれ(複数回答)、紙やコンピュータでの操作による帰納的な類推の場が有効であったことがうかがえる。

一方、37%の生徒が自分の力で発見できなかった。予想以上に大きい数字である。円の半径を等しい辺にして二等辺三角形

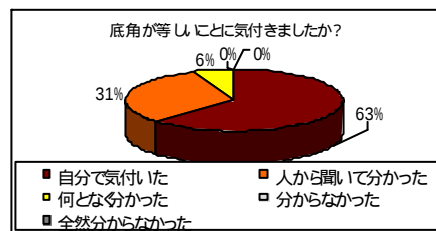


図4 底角が等しいことに気付いたか

表2 どうして分かった？

・コンピュータを使ったので	55%
・紙を折り曲げて重ねたことで	43%
・コンピュータや紙を使わなくても	6%

を作図したことが経験として残っていたため、「2辺が等しい」という定義に気付くだけであった。最終的には、課題や見通しを共有する学習の場において友達の力も借りながら、全員が「底角が等しい」と気付くことができた。その発見に至った過程の1例を右にまとめておく。A君は最初は定義と性質(定理)を同一視していた。それが折り曲げるという行為から角が重なることを発見し、「底角が等しい」ことに気付くことができた。つまり、定義と定理を混沌として区別できなかったものがこの瞬間に理解できるようになったのである。証明の流れを作る上で、定理・定義の違いを把握できたことは大変重要な意味をもつと考える。

A君の気付きは「絶対に2つの辺の長さが等しい」である
A君: 2辺が等しいと思う。
B君: うん、そうだけど、2辺が等しくなるように図形を書いたから、当たり前でしょう?
A君: うん。
C君: 他に、同じように見えるところがない?
B君: (紙で作った二等辺三角形を折り曲げながら) ほら、こういうふうにすれば、何か気付きがあるでしょう?
A君も試してみよう! C君も!
C君: B君、分かった?
A君: うーん、これでいいのかな?(自分の答えに自信がなさそうである)
C君: 言ってみて。
A君: 下の方の角が重なる...かな?
B君: 重なるということはどういうこと?
A君: 同じ! そうか、下の2つの角が同じ!

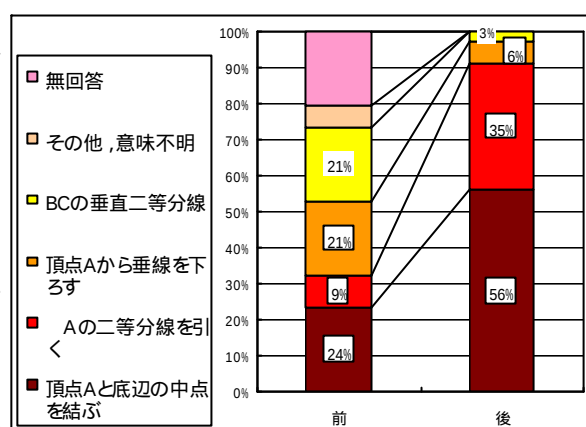
イ 視点

どのような補助線を生徒が考えたのかを調べたのが図5であり、情報交換の前後を比較した。補助線の引き方は4通り考えられるが、証明に有効な補助線は「中線」と「頂角の二等分線」である。

情報交換の前では、「BCの垂直二等分線」を引くという答が多かった。これは、実際に二等辺三角形を折り曲げるという操作をしたため、折り目がどのような線になっているかを推察した結果だと思われる。また、1年生の時に「2点から等しい距離にある点の集合は線分の垂直二等分線である」ことを学習したことが、

経験として残っていたため、この補助線が出てきたものと推察できる。補助線を考える場合、頂角より底辺に着目すれば、折り目は確かに底辺と垂直に加えて中点を通っているが、この場合は垂直という条件は証明に使えない。頂角に着目した生徒は、素直に角の二等分線を引けばよいと答えている。このように着目する部分によって答が変わってくる。頂角に着目するのが取り組みやすいのであろうが、生徒の目は自然と底辺に集まり、底辺と折り目との関係を考えていた。また、無回答も多く、証明に有効な補助線を引くことの難しさが見て取れる。「底辺の垂直二等分線」については、「底辺の垂直二等分線が必ずしも頂点を通るとは限らない」ことを説明し軌道修正を図ったため21%から3%に減少した。また、生徒同士の情報交換を通して、証明に有効な補助線を見付けることができた生徒が33%から91%に増加したことや、無回答が0%になったことから考えると、課題や見通しを共有する学習の場は有効であったと言える。

図5 コミュニケーション活動の前後



ウ 視点

図6を見て分かったとおり、自分なりの証明を書くことができた生徒が72%いる。実際ワークシートを調べてみると、85%の生徒が証明の流れを作ることができていた。この差は、証明に自信がないということであろう。しかし、この85%の生徒すべてが、必要なカードを選び並べることができていた。根拠の意味をきちんと把握していなければカードを選ぶことができない、証明の流れを見通すことができなければカードを並べることができない。つまり、85%の生徒が根拠の意味を把握し、見通すことができたということであり、カードの有効性が確かめられたと言える。

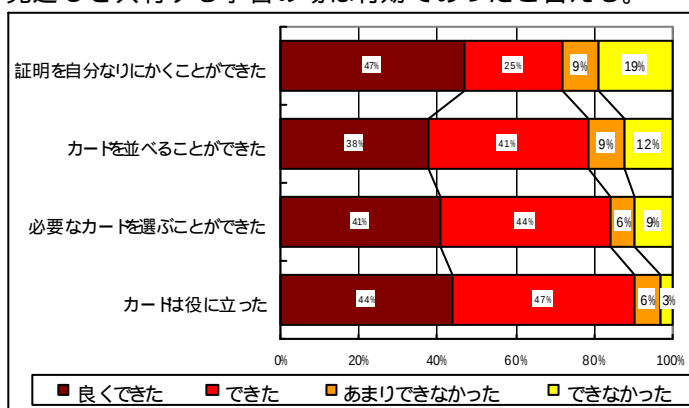


図6 授業後のアンケート結果

次に、具体的にE君の場合について、思考の過程を検証してみる。

作図
E君は右の図のように作図した。底辺の垂直二等分線を引いて、底辺BCの中点を見付け、点Dとして、中線ADを引いた。図では、BCの垂直二等分線を引いたように見えるが、実際は点A、Dを結んでいる。

証明の流れ

$AB=AC, BD=CD$
 1 辺とその両端の角がそれぞれ等しい
 ↓ ならば
 合同

$AB=AC, BD=CD$
 2 辺とその間の角がそれぞれ等しい
 ↓ ならば
 合同

$AB=AC, BD=CD$
 3 辺がそれぞれ等しい
 ↓ ならば
 合同

$AB=AC, BD=CD$
 合同な図形
 ↓ ならば
 対応する角の大きさは等しい
 $\angle ABD = \angle ACD$

$AB=AC, BD=CD$
 2 辺とその間の角がそれぞれ等しい
 ↓ ならば
 合同

$AB=AC, BD=CD$
 3 辺がそれぞれ等しい
 ↓ ならば
 合同

$AB=AC, BD=CD$
 合同な図形
 ↓ ならば
 対応する角の大きさは等しい
 $\angle ABD = \angle ACD$

$AB=AC, BD=CD$
 3 辺がそれぞれ等しい
 ↓ ならば
 合同

$AB=AC, BD=CD$
 合同な図形
 ↓ ならば
 対応する角の大きさは等しい
 $\angle ABD = \angle ACD$

角が等しいというためには、平行線の性質、対頂角の性質と3つが考えられるが、この場合、図から明らかに平行ではないこと、対頂角でもないことが分かる。このことから、消去法にて合同な図形の性質のカードを選んだ。次に、合同であるためには合同条件が言えなければならないと考え、どの合同条件が当てはまるか3つのカードを並べた。

次に作図した図と3つの合同条件を見比べて、合同条件「1辺と両端の角」を取り除いた。

角が等しいカードはどれかなあ...
平行でも対頂角でもない...

これは、図を見ると既に2組の辺が等しいことが分かっているため、1組の辺が等しい「1辺とその両端の角」の条件に合わないために消去した。

- ・2組の辺が等しいから...
- ・1辺とその両端の角は違うかなあ...
- ・あと1か所は何処が等しいのかなあ

ABとBD, ACとCDの間の角はBとC
↓
BとCは等しい?
↓
結論だから違う 残りは「3辺」?...
あと1か所等しい辺は...

最終的に共通な辺ADがあることに気づき「3辺がそれぞれ等しい」という合同条件を選んだ。
仮定から合同条件を見付けるのではなく、問題に合う合同条件をまず見付け、それが当てはまるかどうか、検証している。

「ABDとACDで」など書かれていない部分があり、証明の書き方としては不十分である。しかし、証明の流れとしてはうまくできている。

補助線をどのように引くのがきちんと記述できている。証明の流れを見通し、「3辺相等」を用いる根拠を明確にしなければいけないと考えた結果、書かれたものである。根拠を明らかにしようとする態度は評価できる。また、このように書くことができたのは、友達の考えを参考にしたり、自分の中で試行錯誤しながら、考えを結論に向けて収束させていった結果である。

E君は決して能力が高い方だとは言えないが、カードを使うことにより、自分の考えが目に見えるようになり、意外にすんなりと証明することができた。当てはまりそうなカードを選び出し、その中から条件に合わないカードを消去して必要なカードを選び出した結果だと言える。

補助線を引くことから出発し自分の考えで中線(教科書では角の二等分線を用いてある)を選び、自分なりの方法によって証明を構成できていることは大変評価できる。

底辺の中点Dをとり頂点Aと結び
 $AB=AC, BD=CD, AD=AD$
 仮定より、 $AB=AC \dots \textcircled{1}$ $BD=CD \dots \textcircled{2}$
 $AD=AD \dots \textcircled{3}$

3 辺がそれぞれ等しい
↓ ならば
合同

合同な図形
↓ ならば
対応する角の大きさは等しい
よって $\angle B = \angle C$

表3 カードの有効性

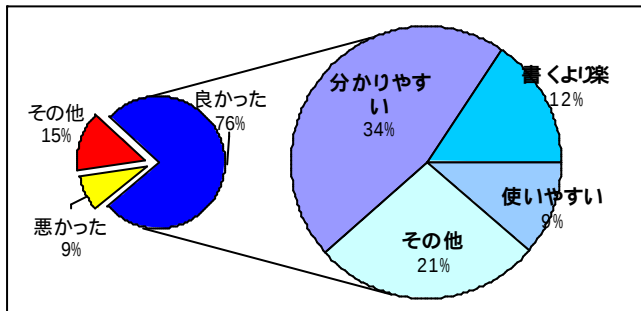


図7 カードを使ってみての生徒の感想

図7に示すように、カードを使って良かったと答えた生徒が76%いる。そのうち、分かりやすいからと答えた生徒が34%で具体的には表3のように分類することができた。

カードの有効性については、こちらが意図したとおりカードの良さに気付いていたことが分かる。カードを使うことによって証明が身近なものに感じられており、普段は指示を待っているような生徒や記述式の問題を嫌っている生徒にも、自ら積極的に問題にかかわろうとする態度が見られ、さらに、ほとんどの生徒が証明の流れをつかむことができた。

カードの作り方によるもの	・色分けされていて見やすい。 ・『～ならば～』というふうを書いてあり証明のときに役に立つ。 ・一目で分かる。 ・カードの下の方に書いてある『$A = B = C = D$』などの式。
カードの使い方によるもの	・間違えても自分の考えを消さずにできる。 ・やり直しが簡単。 ・証明を書かなくてもよい。 ・定理を忘れたときに便利である。 ・分かりにくい定理をカードを使って探ることができる。 ・並べるだけでよい。 ・根拠などを書かなくてもよい。 ・簡単に証明できる。 ・言葉で考えるより、カードを使って考える方がよい。 ・証明を消さなくてもよい。 ・短時間で証明できる。

6 研究のまとめと今後の課題

(1) 研究のまとめ

ア 証明を単に定理の説明に終わらせるのではなく、性質を生徒自身に発見させる過程、帰納的類推の場を設けることによって、証明に目的意識をもって取り組むようになった。自分で発見した問題を何とか解決しようという意欲につながっていった。

イ 問題を意識・把握させるためにお互いに情報を共有する学習の場を設けた。そのことによって、生徒は仮定と結論をしっかりと把握することができた。

学習過程の中に意図的に見通す場を設けることによって、生徒同士の情報交換を促した。その結果、どのような根拠を用いて証明を進めていけばよいのかを見通すことができるようになった。

ウ 定理・定義カードを用いることで生徒は試行錯誤しやすくなり、証明の流れを作ることができるようになった。

(2) 今後の課題

ア 問題を提示するために作図ツールソフトを用いたが、本来は生徒一人一人にコンピュータを与え作図させて学習を進めるべきだと思われる。そうすることによって、更に数学的な活動ができ、論理的な思考力も育成できると考える。

イ 定理・定義カードは大変有効であったが、見通しを考えず、ただ単にパズル的な感覚でカードを選び出す生徒も少なからずいた。使い方と証明の意義まで含めた学習展開を工夫する必要がある。

また、「使い方が分からない」と答えた生徒（図7の9%の生徒）を少しでも減らしていくために、より直観的に定理を把握できるようなカードを開発する必要がある。

ウ 定理・定義カードを用いることによって、証明の流れを作ることとは比較的簡単にできるようになった。今後は、数学的表現で証明を記述させるためにはどうすればよいか考えていかなければならない。

《参考文献》

- ・ 根本 博 『数学的活動と反省的経験』 平成11年 東洋館出版社
- ・ 日本数学教育学会 編著 『算数教育指導用語辞典』 昭和59年 新数社